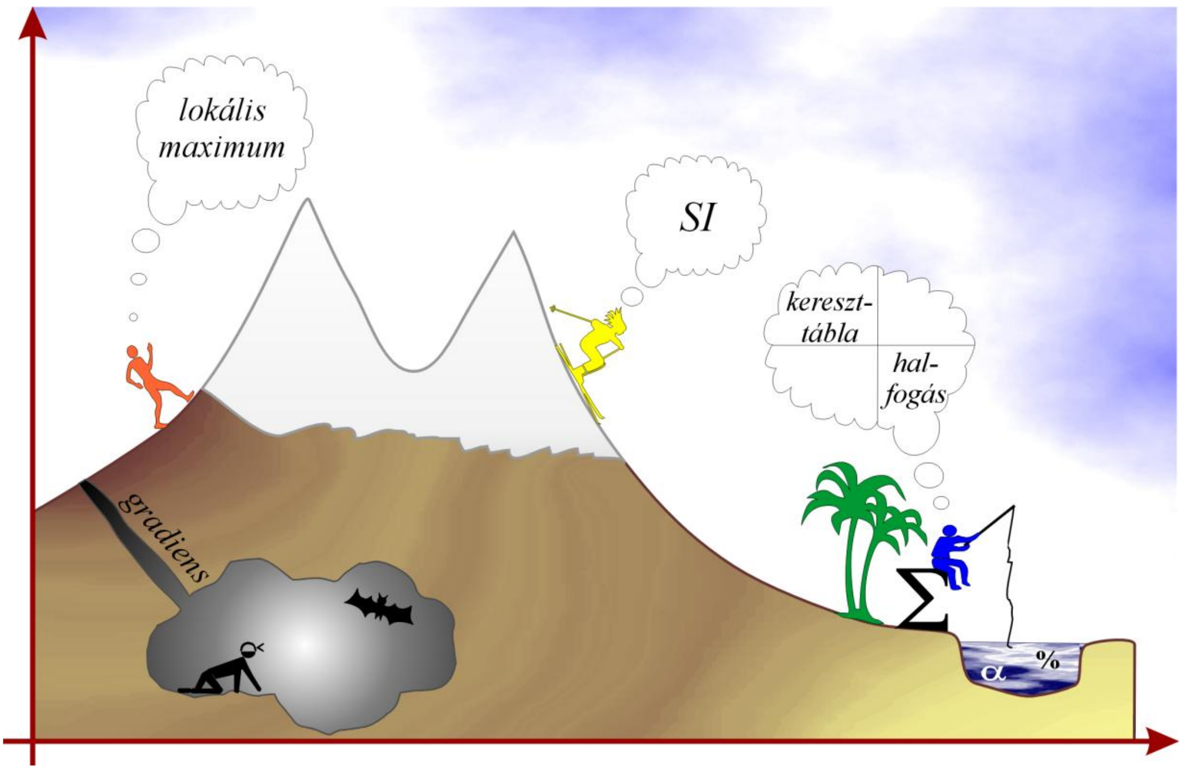
Telbisz Tamás – Szabó Pál – Szalai Zoltán

Matematika a földrajzban

Útmutató és feladatgyűjtemény

Földrajzos hallgatók részére



ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet
Földrajztudományi Központ
Budapest, 2013

Írta:

dr. Telbisz Tamás egyetemi adjunktus
dr. Szabó Pál egyetemi adjunktus
dr. Szalai Zoltán egyetemi docens

Lektorálta:

dr. Nemes-Nagy József egyetemi tanár
Kiss Klaudia tudományos segédmunkatárs

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar
Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ
Természetföldrajzi Tanszék,
Budapest, 2013
www.tef.elte.hu / Kiadványok

ISBN 978-963-284-417-6

Tartalomjegyzék

Mottó: „A Természet nagy könyve csak azok előtt áll nyitva, akik ismerik a nyelvet, amelyen írva van: a matematika nyelvét."
(Galileo Galilei)

1. Bevezetés

A földrajztudomány korábban (nagyjából a XX. század közepéig) elsődlegesen leíró jellegű volt. Azóta azonban egyre nagyobb hangsúlyt kap az ok-okozati kapcsolatok feltárása az összefüggések keresése, és a többi természettudomány (fizika, kémia, biológia, geológia) földrajzot is érintő szakmai eredményeinek felhasználása. Mindezekhez a matematikai eszköztár használatára van szükség, bár természetesen nem olyan magas fokon, mint a fent említett többi tudományág esetében. Ha az a kérdés, hogy egy régió milyen fokú fejlesztésre szorul, akkor meg kell találni a megfelelő mutatószámokat, melyek segítségével a fejlettségi különbségek számszerűsíthetők. Ha a talajképződés folyamatait kívánjuk jellemezni, akkor tisztában kell lenni a kémiai változásokat leíró egyenletekkel. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy a tengerszint feletti magasság hogyan befolyásolja a hőmérséklet, nyomás, stb. változását, akkor meg kell ismerkedni a kapcsolatot leíró függvények jellemzőivel. Ha a globális éghajlatváltozást tanulmányozzuk, akkor nem elég az újságok sablonmondatait ismételgetni, hanem szükségünk van az adatok matematikai elemzésére is. Íme néhány kiragadott példa, melyek rávilágítanak arra, hogy a matematika milyen fontos szerepet játszik napjaink földrajztudományában. Ezért fontos, hogy a földrajzi tanulmányok kezdetén a matematikai alapokkal mindenki tisztában legyen. Ezt a célt szolgálja a „Matematika a földrajzban" című tantárgy. De a későbbiek során is előfordul még néhány matematikai jellegű tantárgy, melyek már speciálisabb, elsősorban statisztikai ismeretekkel vértezik fel az addig eljutó földrajzos hallgatót.

A „Matematika a földrajzban" tantárgyhoz szükséges matematikai ismeretek a középiskolás szintet elméletben nem haladják meg. Ez a szint azonban a valóságban rendkívül heterogén, hiszen a földrajzos hallgatók különféle középiskolákból, különféle egyéni képességekkel és „változó" matematikai hozzáállással érkeznek az egyetemre. Így e tantárgy egyik célja, hogy világosan kijelölje, hogy milyen matematikai tudásszintet várunk el a földrajzos hallgatóktól. Másrészt a középiskolai matematika anyaghoz képest fontos különbség, hogy a feladatok szövege, jellege minden esetben egy-egy földrajzi probléma-felvetéshez igazodik.

Reméljük, hogy ez az útmutató és feladatgyűjtemény megfelelően szolgálja a fenti célok elérését,

a Szerzők

2. A jegyzetben használt matematikai jelölések

$\forall$: minden (hivatalos neve: univerzális kvantor)
$\exists$: létezik (hivatalos neve: egzisztenciális kvantor)
϶: eleme

Halmazok jelölése:
N: természetes számok halmaza
R: valós számok halmaza
$\mathbf{R}^+$: pozitív valós számok halmaza
[x; y]: zárt intervallum
(x; y): nyílt intervallum

$\bar{x}$: az $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ adatsor átlaga

A középiskolában talán ritkábban, de az egyetemen annál gyakrabban fordul elő a szumma jelölés, amit akkor használunk, ha sok számot kell összeadni (ha egyértelmű, hogy *i* értéke mettől meddig változik, akkor a szumma jel alatti és fölötti számok egyszerűen elhagyhatók):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

A szummához hasonlóan sok szám összeszorzása is felírható egyszerűbben a produktum jelölés használatával:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

3. Mutatószámok és egyszerűbb statisztikai paraméterek kiszámítása

A földrajzi kutatások (természeti és társadalmi) nagy része a különböző jellegű számszerű adatokra, és azok feldolgozására épül. Alapja ennek, hogy a természeti, társadalmi, gazdasági jelenségek jelentős részét mérhetjük, számszerűsíthetjük. A számszerű adatok előállítása többféle módon történik (hivatalos vagy egyéni összeírások, felmérések, mérések stb.). Egy kutatás során a különböző adatokat feldolgozzuk, s ennek során különböző matematikai, statisztikai, számítástechnikai módszereket használunk.

Az általunk használt számszerű adatok négy fontos információval vannak felruházva, így válnak földrajzi adatokká: mit (jelenség), miben (mértékegység), mikor (idő) és ami nagyon fontos, hol (hely) mérünk. Az adatokat adattáblákba foglaljuk mérőszámok szerint. A mérőszámokat (vagy más néven mutatókat, jelzőszámokat) oszloponként (esetleg soronként) tüntetjük fel, s így ún. „földrajzi adatmátrixot” kapunk.

Kétféle számszerű adattal dolgozunk: abszolút mutatókkal (amit mérünk) és relatív (származtatott, fajlagos) mutatókkal. Előbbi például a népesség száma (fő), az erdőterület nagysága (ha) stb., az utóbbi a népsűrűség (fő/km^2), az erdőterület aránya (%) stb.

A számítások során fontos figyelni a mérőszámok mértékegységére, különösen az átváltásokra, a nagyságrendre (pl. fő vagy ezer fő), illetve a származtatott mutatóknál pedig arra, hogy a mértékegység követi a mérőszámokkal való műveletet (pl. népsűrűség: fő/km^2). Számos olyan jelzőszám van, amelynek a számlálója és a nevezője azonos mértékegységű, így az osztás után ezek mértékegység-nélkülivé válnak, pl. városi népesség (fő) / teljes népesség (fő) = városi népesség aránya (–).

A különböző mérőszámokkal műveleteket végezhetünk: összeadhatjuk, kivonhatjuk őket, eloszthatjuk egymással őket, esetenként még szorzásuk is előfordulhat, persze mindezeket csak akkor, ha értelmezhető új jelenséget kapunk. Fontos kiemelnünk, hogy számos földrajzi feladat csak akkor oldható meg, ha tisztában vagyunk a jelenségek, s így a földrajzi mérőszámok tartalmával, jelentésével, valamint ismerjük a különböző jelenségek közötti összefüggéseket (melyikből melyik származik, melyek egészítik ki egymást, melyiket milyen újabb jelenségekre lehet felbontani), mert így nyernek csak értelmet az egyes műveletek.

A továbbiakban az egyes mutatókkal végezhető számításokból adunk ízelítőt (a teljesség igénye nélkül). Egy-egy feladat(típus) előtt keretes részben további elméleti leírások is találhatók a feladatok megoldásához.

1. feladat

A népszámlálás szerint 2011. október 1-jén Magyarország lakónépessége 9 937 628 fő volt, 2001-ben pedig 10 198 315 fő. A népesség csökkenése a természetes fogyásból eredt: 387 205 fő volt ez az érték. (*Forrás: KSH*)

Kérdés: Mekkora volt a migrációs (vándorlási) egyenleg a vizsgált időszakban?

2. feladat

Egy 9 km^2 területű tó vízforgalmának alakulása egy nap alatt az alábbi volt: a tápláló patakok 63 725 m^3 vizet szállítottak bele, hullott 1 mm csapadék, ugyanakkor kiszivattyúztak öntözéshez 5100 m^3 vizet, csatornán lement 23 540 m^3 víz és elpárolgott 12 300 liter víz.

Kérdés: Mennyivel változott meg (m^3) a víz térfogata?

3. feladat

Egy térkép méretaránya 1:20 000. Kijelölünk rajta egy 3cm x 3cm-es sík mintaterületet felmérési célból.

Kérdés: A valóságban hány négyzetkilométernyi területet kell felmérni?

4. feladat

Az alábbi táblázat az adott hőmérsékleten befogadható maximális vízgőztartalmat mutatja.

°C	0	5	10	15	20	25	30
g/m^3	5	7	9	13	17	23	30

Kérdés:

a) Ha a tengerszinten lévő mérési pontunkon 25°C esetében 39% a relatív (viszonylagos) vízgőztartalom, akkor mennyi az abszolút (tényleges) vízgőztartalom?

b) A hegyoldalon emelkedve, ha 100 méterenként 1°C-ot csökken a hőmérséklet, akkor milyen magasságban érjük el a harmatpontot? (Az abszolút vízgőztartalom nem változik.)

5. feladat

A hazai nemzeti parkokra vonatkozó adatbázisunk hiányos. Az alábbi táblázat tartalmazza a meglévő értékeket.

	Terület (km^2)		**Terület (km^2)**
Hortobágyi Nemzeti Park	...	**Duna–Dráva Nemzeti Park**	501
Kiskunsági Nemzeti Park	...	**Körös–Maros Nemzeti Park**	511
Bükki Nemzeti Park	391	**Balatoni-felvidéki Nemzeti Park**	568
Aggteleki Nemzeti Park	199	**Duna–Ipoly Nemzeti Park**	603
Fertő–Hanság Nemzeti Park	235	**Őrségi Nemzeti Park**	440

Ami ismert még, hogy a nemzeti parkok összes területe 4672 km^2, valamint, hogy a nagyobb Hortobágyi Nemzeti Park területéből kivonva a Kiskunságiét 260 km^2-t kapunk.

Kérdés:

a) Mekkora a Hortobágyi és mekkora a Kiskunsági Nemzeti Park területe (km^2)?

b) Melyik hazánk legnagyobb és legkisebb területű Nemzeti parkja?

A százalék- és rátaszámítás elég gyakori művelet: két mutató hányadosát 100-zal szorozva kapjuk meg a százalékos értéket (fontos, hogy azonos legyen a két mutató mértékegysége). Ami különbözik az egyes számításoknál, hogy melyik dimenzióban tér el a két jelzőszám a jelenség–földrajzi tér–idő hármasból:
– a tér különbözik, idő és jelenség megegyezik
pl. i. térség GDP-je / ország GDP-je ·100 = i. térség részesedése a GDP-ből (%)
– a jelenség különbözik, tér és idő megegyezik
pl. városi népesség / teljes népesség · 100 = városi népesség aránya (%)
– idő különbözik, jelenség és tér megegyezik:
pl. ipari termelés 2000. évben / ipari termelés 1990. évben · 100 = ipari termelés változása (%)

Fontos kiemelni, hogy a százalékok változását ún. százalékpontban adjuk meg. Például:

	1950	**2000**
teljes népesség (fő)	250 000	300 000
városi népesség (fő)	125 000	210 000
városi népesség aránya (%)	50	70

Elemzés: 50 év alatt 20 százalékponttal nőtt a városlakók aránya (és nem 20 százalékkal). Kifejtve: 50 év alatt 85 ezer fővel, azaz 68 százalékkal nőtt meg a városlakó népesség száma. Másképpen: a városlakók aránya 50-ről 70 százalékra emelkedett, azaz 20 százalékponttal nőtt az arányuk, illetve a városlakók aránya 40 százalékkal nőtt meg ((70-50) / 50 · 100 = 40%))

6. feladat

A népszámlálás szerint 2011. október 1-jén Magyarország lakónépessége 9 937 628 fő volt. Ebből 3 033 770 fő élt községekben és nagyközségekben, a főváros lakossága pedig 1 729 040 fő volt. (*Forrás: KSH*)

Kérdés:

a) A lakónépesség hány százaléka élt városokban 2011-ben?

b) A lakónépesség hány százaléka élt a fővároson kívüli városokban 2011-ben?

7. feladat

Egy régióban a teljes népességszám 2 342 550 fő volt 2010.01.01-jén. Az aktív népesség aránya 62% volt, foglalkoztatva pedig 1 257 750 fő volt.

Kérdés:

a) Mekkora a munkanélküliségi ráta?

b) A munkanélküliek 10,2106%-a tartós munkanélküli, hány főt jelent ez (kerekítve)?

8. feladat

Egy 3680 fős településnél egy kérdőíves felmérésnél a lakosság 5%-át kérdezzük meg. A reprezentativitás miatt a nemi egyenlőség mellett a korosztályos megoszlásra is figyelni akarunk, így a megkérdezetteket úgy kell összeállítani, hogy egynegyede fiatal (<18 év), fele középkorú (18-60 év) és egynegyede időskorú (>60 év) legyen.

Kérdés: Hány kérdőívet kell kitöltetni az egyes korcsoportok esetében?

9. feladat

Egy hazai kistáj területe 180 km^2. A terület 22%-a beépített, 45%-a erdő, 10%-a rét, legelő, 18%-a szántóföld, 5%-a vízfelület. A kistájon Natura2000 védettséget kapott az erdők 70%-a, a rét, legelő 42%-a és a teljes vízfelület.

Kérdés: A kistáj mekkora területe (km^2-ben) lett védett?

10. feladat

15 dekagramm hordalék szemcseméret-osztályozása során kapott értékeket az alábbi táblázat tartalmazza.

Szemcseméret	>20 mm	20-2 mm	2-0,2 mm	0,2-0,02 mm	0,02 mm>
Tömeg (gramm)	63	45	32	7	3

Kérdés: Hány százaléka kavics (>2 mm) és hány százaléka homok (2-0,02 mm) a hordaléknak?

11. feladat

Szlovákiába utazunk kirándulni négyen. A kinti szállásdíj alapáron 21 euró/fő/éjszaka. Hat éjszakát töltenénk kint, öt éjszaka felett fejenként 15% kedvezményt adnak a teljes szállásdíjból. Az eurót a közeli pénzbeváltó-helyen vesszük meg, ahol az alábbi információt találjuk:

	Vétel	Eladás
Euró	280	300

Kérdés: Hány forintot váltsunk be a kinti szállásdíj kifizetésére?

Egy szám normálalakját úgy kapjuk, hogy a számból egy kéttényezős szorzatot csinálunk: az első tényező 1 és 10 közé esik, a második tényező pedig 10 megfelelő hatványa.
Például: $123\ 145 = 1{,}23145 \cdot 10^5$

12. feladat

A Kemence-patak vízgyűjtőterületének nagysága 107 km^2. A vízgyűjtőterület 20%-án 3 mm csapadék hullott, amelynek 5%-a a patakba jutott. A mérési pontunkon a vízhozam = 0,294 m^3/s, a bejutott csapadékvíz ezt a vízhozamot 50%-kal megnövelte.

Kérdés:

a) Mennyi csapadékvíz (m^3) jutott a patakba? Az értéket a szám normálalakjában adja meg!

b) A mérési pontunkon egy óra alatt mennyi víz (m^3) jut át a megnövekedett vízhozam esetében? Az értéket a szám normálalakjában adja meg!

Az adatsor ún. jellegadó értékei közé tartozik a minimum, a maximum és az átlag. Az átlagnak is több fajtája van, itt a számtani átlagot vesszük csak; ez az adatok összeadása és az elemszámmal való osztás eredményeként kapható meg.

13. feladat

Egy mérési ponton léghőmérséklet-értékeket mértünk, ezeket az alábbi táblázat tartalmazza.

Időpont	1:00	7:00	13:00	19:00	max	min
Hőmérséklet (°C)	10,3	10,2	18,5	16,2	20,3	9,9

Kérdés:

a) Mekkora volt a napi középhőmérséklet?

b) Mekkora volt a napi hőingás?

14. feladat

Hazánk alföldi megyéinek területét, lakónépességének számát az alábbi táblázat tartalmazza. (*Forrás: KSH*)

	Bács-Kiskun	Békés	Csongrád	Hajdú-Bihar	Jász-Nagykun-Szolnok	Szabolcs-Szatmár-Bereg
Terület (km^2)	8445	5631	4263	6211	5582	5936
Lakónépesség (ezer fő), 2012	522	363	412	543	390	565

Kérdés:

a) Mekkora az Alföld (hat megye) népsűrűsége (fő/km^2)?

b) Mekkora az alföldi megyék népességének átlaga?

c) Melyik a legnagyobb (maximum) és melyik a legkisebb (minimum) népsűrűségű alföldi megye (fő/km^2 értékkel)?

Egyes számítások esetében előfordul, hogy az eredeti adatokat az adatsor egyik meghatározott értékéhez viszonyítjuk. Az idősoros adatok esetében az ún. bázis indexnél minden adatot a kezdő (az első) időpontbeli (év, negyedév, hónap stb.) adathoz, az ún. láncindexnél pedig egy-egy adat esetében mindig az előző időpontbeli (év, negyedév, hónap stb.) adathoz viszonyítjuk és százalékban adjuk meg.

15. feladat

Az alábbi táblázat Magyarország ipari termelési értékének éves adatait tartalmazza. (*Forrás: KSH*).

	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Érték (folyó áron, Mrd Ft)	19 798	21 361	22 024	18 886	21 466	23 788
Bázis index (%)						
Lánc index (%)						

Kérdés:

a) Mekkorák Magyarország ipari termelésének bázis index és mekkorák lánc index értékei 2006-tól 2011-ig? Töltse ki a táblázatot!

b) Mekkora volt a vizsgált időszak alatt a maximum és a minimum bázis index értékek között a százalékpontos eltérés?

c) Melyik évben volt a legnagyobb arányú a növekedés az előző évhez képest a lánc index alapján?

Egy-egy mérőszám értékeit csoportosítani is szoktuk, s így kategóriákba osztjuk az egyes földrajzi helyeket (pl. alacsony, közepes és nagy népsűrűségű területek). Első lépésben nagyságsorrendbe állítjuk a mérőszám adatai szerint a helyeket, majd meghatározott szempont szerint két vagy több csoportra oszjuk őket. Ilyen szempontok szoktak lenni: egyenlő elemszám, egyenköz (azonos értékvallum, pl. 0-99, 100-199, 200-299 stb.), vagy egy kiemelt értékhez kötés (pl. átlag felett és alatt). Ez a kategorizálás szubjektív, azaz a készítője dönti el a csoportszámot és a határokat, ám a leírt szempontokon túl szükséges figyelembe venni azt is, hogy mi a cél (áttekintés, részletes elemzés stb.).

Két szempont szerint is lehet földrajz helyeket csoportosítani, ilyenkor egyszerre két mérőszámuk alapján (pl. GDP/fő és népsűrűség) osztjuk kategóriákba az elemeket. Ezt ún. kereszttáblában is ábrázolhatjuk, amely lehet 2x2-es, 3x2-es, 2x3-as, 3x3-as stb., például egy kétszer kettes, ahol az egyes cellákba beírjuk a két állításnak egyszerre megfelelő földrajzi térséget: ld. következő oldal.

	Alacsony GDP/fő-jű terület (< 2000 euró/fő)	**Magas GDP/fő-jű terület (>= 2000 euró/fő)**
Magas népsűrűségű terület (>= 100 fő/km²)	"A" térség, "D" térség	"B" térség
Alacsony népsűrűségű terület (< 100 fő/km²)	"C" térség, "E" térség, "F" térség	"G" térség. "H" térség

16. feladat

Hazánk alföldi megyéinek területét, lakónépességének számát és a GDP értékét az alábbi táblázat tartalmazza. (*Forrás: KSH*)

2010	**Terület km^2**	**Népesség fő**	**GDP millió Ft**
Bács-Kiskun	8 445	528 418	898 952
Békés	5 631	366 556	538 507
Csongrád	4 263	423 240	825 749
Hajdú-Bihar	6 211	541 298	1 057 370
Jász-Nagykun-Szolnok	5 582	390 775	656 799
Szabolcs-Szatmár-Bereg	5 936	560 429	798 748

Kérdés:

a) A hat alföldi megyéből melyek azok, ahol az egy főre jutó GDP értéke az országos érték (2 670 940 Ft) 65%-a alatt van és a népsűrűség kisebb, mint 80 fő/km^2? (A megyék mellett az értékeket is tüntesse fel!)

b) Ábrázolja kereszttáblában a megyéket, ahol a választóvonalak az a) pontban megadott értékek legyenek.

Területi egyenlőtlenségi mutatók

A földrajzi teret, illetve annak sokszínűségét, heterogenitását egyrészt térképeken ábrázoljuk (általános és tematikus térképek), másrészt statisztikai adatok esetében a területi egyenlőtlenséget számszerűsíthetjük is. Előbbi esetében egy képet, utóbbi esetében egy számértéket kapunk: a területi egyenlőtlenségek mérése különböző indexekkel történhet, ami során az adott mérőszám adatainak számításából egy konkrét számértéket kapunk eredményül; ez (általában) minél magasabb annál nagyobb a területi egyenlőtlenség (mértéke). Számos fajtája ismert (relatív terjedelem, koncentrációs mutató, Hoover-index, GINI koefficiens, Theil-index stb.).

A számérték magában azonban kevésbé kifejező, ezért viszonyítani szoktuk egymáshoz ezek az indexértékeket az alábbi módokon:

a) 1 térség (több területegység) – 1 jelenség – <u>több időpont</u>;
Ez a leggyakoribb, egy folyamatra világít rá.

b) 1 térség (több területegység) – több <u>jelenség</u> – 1 időpont
Gyakori, keresztmetszeti vizsgálatnál.

c) <u>több térség</u> (több területegység) – 1 jelenség – 1 időpont
Ez ritkább, fenntartásokkal használatos.

Az ún. relatív terjedelem, mint egyenlőtlenségi mutató, oly módon számítható, hogy az adatsorban előforduló legnagyobb és legkisebb érték különbségét (az ún. abszolút terjedelmet) az adatsor átlagához viszonyítjuk:

$$Q = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\bar{x}}$$

ahol x_{max} az adatsor (x_i) maximuma, x_{min} az adatsor minimuma, $\bar{x}$ az adatsor átlaga.
Mértékegysége nincs, értékkészlete: $0 \leq Q < \infty$.
Alkalmas különböző átlagú adatsorok és különböző mértékegységű adatsorok terjedelmének összehasonlítására. Minél nagyobb az index értéke, annál nagyobb az egyenlőtlenség nagysága. Ha az adatsor átlaga 0, akkor csak abszolút terjedelem számítható, relatív nem!

17. feladat

Az észak-európai országok export-import adatait tartalmazza az alábbi táblázat. (*Forrás: Nordic Statistical Yearbook 2012*)

	Dánia	Svédország	Finnország	Norvégia	Izland
Export (millió euró)	81 468	134 506	56 743	127 584	3842
Import (millió euró)	70 285	126 439	60 474	65 223	3479

Kérdés:

a) Mekkora az export és mekkora az import relatív terjedelme az öt észak-európai ország esetében?

b) Az export vagy az import esetében nagyobb az egyenlőtlenség mértéke az öt észak-európai ország esetében?

Az alábbi képlettel számíthatjuk ki az ún. koncentrációs mutatót:

$$K = \sum_{i=1}^{n} (x_i / \sum x_i)^2$$

ahol x_i = i. területegység értéke egy abszolút mutató (adatsor) esetében (pl. egy ország népességadata vagy egy régió GDP értéke), $\sum x_i$ = az összes vizsgált területegység értékének összege (pl. az összes ország népességadata vagy az összes régió GDP értéke).
A koncentrációs mutatónak mértékegysége nincs, a maximuma 1, a minimuma $1/n$ (n = elemszám), és minél nagyobb az index értéke, annál nagyobb a jelenség területi koncentrációja.

18. feladat

Az Andok térségbeli országok több évre vonatkozó népességadatait az alábbi táblázat tartalmazza. (*Forrás: de Agostini, Fischer Weltalmanach*)

	Népesség (ezer fő)				
Év	**Kolumbia**	**Peru**	**Ecuador**	**Bolívia**	**Chile**
1960	16 587	9 931	4 439	3 351	7 608
1970	22 561	13 193	5 970	4 212	9 496
1980	28 447	17 324	7 961	5 355	11 147
1990	34 970	21 569	10 264	6 573	13 099
2000	42 299	25 661	12 646	8 329	15 211

Kérdés:

a) Mekkora volt a népesség koncentrációs mutatójának az értéke 2000-ben az Andok országai esetében? (Négy tizedes pontossággal adja meg!)

b) 1960-ban 0,2633 volt a koncentrációs mutató mértéke (K_{1960}= 0,2633). Milyen változás történt a népesség koncentrációja esetében?

A földrajzi térben ritkák a szabályos geometriai alakzatok, ám különböző jelenségek modellezése esetében megjelennek. Emiatt a geometria is jelen van a földrajzi számítások során. Ráadásul, mivel a földrajzi térben zajló lokalizálás során egy-egy földrajzi pontot koordinátákkal láthatunk el, a koordináta geometriai számítások is használatosak.
Például a földrajzi távolságszámításnak sokféle formája van. Kisebb terület esetén eltekinthetünk a Föld görbületétől és a koordináta-geometria módszereit alkalmazhatjuk. Ez alapján például két pont, $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ és $B\ (x_B\ ;\ y_B\ )$ közötti távolságot is kiszámíthatjuk:
EUKLIDESZI távolság:

$$de_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

MANHATTAN távolság:

$$dm_{AB} = |\ x_A - x_B\ | + |\ y_A - y_B\ |$$

Ezen túl az egyenesre, alakzatokra (pl. kör) vonatkozó koordináta-geometriai számítások is alkalmazhatók.

Egyenes egyenlete:

A $P_1\ (x_1; y_1)$; $P_2\ (x_2; y_2)$ pontokon átmenő egyenes
irányvektora: $\mathbf{v}\ (v_1; v_2) = \mathbf{v}\ (x_2\text{-}x_1; y_2\text{-}y_1)$;
normálvektora: $\mathbf{n}\ (n_1; n_2) = \mathbf{n}\ (y_2\text{-}y_1; x_1\text{-}x_2)$;
iránytangense: $m = (y_2\text{-}y_1) / (x_2\text{-}x_1)$
Bármely elsőfokú két ismeretlenes egyenlet a sík egy egyenesét adja meg.
Az egyenes egyenlete egy pont $(x_0; y_0)$ és az irányvektor $(v_1; v_2)$ koordinátái alapján az alábbi módon írható fel:

$$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$$

Kör egyenlete:

$C\ (u;v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$(x\text{-}u)^2 + (y\text{-}v)^2 = r^2$$

Egy pont $(x; y)$ a köríven fekszik, ha $(x\text{-}u)^2 + (y\text{-}v)^2 = r^2$,
a pont köríven belül van, ha $(x\text{-}u)^2 + (y\text{-}v)^2 < r^2$, és kívül, ha $(x\text{-}u)^2 + (y\text{-}v)^2 > r^2$.

19. feladat

Két város koordinátái egy derékszögű koordináta-rendszerben:
Kis (100; 150) és *Nagy* (300; 250), ahol egy egység 1 kilométert jelent. A két település között egy egyenes utat építenek a síkságon keresztül.
Kérdés: Átmegy-e az út *Közepes* (150; 250) településen?

20. feladat

Két város koordinátái egy derékszögű koordináta-rendszerben: *Alsó* (5; 8) és *Felső* (-7; 15), ahol egy egység 10 kilométert jelent. Mindkét város vonzáskörzete egy-egy kör (melynek középpontjában a város van); *Alsó* városhoz 750 km^2-es, *Felső* városhoz 3000 km^2-es vonzáskörzet tartozik.

Kérdés:

a) Milyen távol van egymástól a két város euklideszi és milyen messze van manhattan szempontból (kilométerben)?

b) Összeér-e a két város vonzáskörzete (vonzásköre)?

c) Melyik város vonzáskörzetébe tartozik *Középső* település, ha koordinátái (1; 5)?

4. Elemi számítási feladatok mértékegységekkel

4.1. Az SI fogalma, számítások hosszúsággal és hosszúságból származtatott mértékegységekkel

A természettudományos számításokhoz az SI (Mértékegységek Nemzetközi Rendszere - Système International d'Unités) rendszer mértékegységei használatosak. Hét egymástól dimenziófüggetlen SI-alapegység van, melyekből több származtatott egységet lehet létrehozni. (Az SI mértékegységeken kívül több nem SI, de azzal összhangban levő mértékegység is használatos.)

mértékegység neve	**jele**	**mennyiség neve**	**mennyiség jele**
méter	m	hossz	l (kis L)
kilogramm	kg	tömeg	m
másodperc	s	idő	t
amper	A	elektromos áramerősség	I (nagy i)
kelvin	K	abszolút hőmérséklet	T
mól	mol	anyagmennyiség	n
kandela	cd	fényerősség	I_v

A hosszúság, a terület és a térfogat (űrtartalom) mérésére az SI hosszúságegységét (m, méter) és az abból származtatott mértékegységeket használjuk:

hosszúság: m
terület: m^2
térfogat: m^3

Látható, hogy a hosszúságból származtatott terület és térfogat nominális értelemben nagyságrendi különbségeket eredményez.

A hatványokkal végzett műveletekhez az alábbi összefüggések ismerete szükséges:

$$10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$$
$$10^x / 10^y = 10^{x-y}$$
$$(10^x)^y = 10^{x \cdot y}$$

Nagyságrendi különbségek a vizsgált jelenségek/tényezők sajátosságaiból erednek. A nagyságrendi különbségeket szorzótényezővel és latin előtagokkal (prefixum) is jelölhetjük.

szorzótényező	**SI prefixum**	**szorzótényező**	**SI prefixum**
10^{-1}	deci (d)	10^1	deka (D)
10^{-2}	centi (c)	10^2	hekto (H)
10^{-3}	milli (m)	10^3	kilo (K)
10^{-6}	mikro (μ)	10^6	mega (M)
10^{-9}	nano (n)	10^9	giga (G)
10^{-12}	piko (p)	10^{12}	tera (T)
10^{-15}	femto (f)	10^{15}	peta (P)

Gyakran használt nem SI, de SI-be szorzótényezővel átszámítható mértékegységek:

Angström (Å) $= 10^{-10}$ m
Tonna (t) $= 10^3$ kg
Hektár (ha) $= 10^4$ m^2
Liter (l) $= 10^{-3}$ m^3

21. feladat

Világ talajaiban tárolt szénkészlet 1500 Gt. Adja meg ennek értékét Pg –ban!

22. feladat

1 cm = _____ nm
1 μm = _____ cm
1 nm = _____ mm

23. feladat

1 m^2 = ___ cm^2
1 ha = ___ m^2
1 cm^2 = ___ μm^2

24. feladat

1 cm^3 = ___ l = ____ ml
1 dm^3 = ___ l = ____ ml
1 cm^3 = ___ μm^3
1 m^3 = ___ l

25. feladat

Egy 1 cm élhosszúságú kocka 1 nm vastagságú lemezekből áll.
a) Mekkora a kocka lemezeinek a felülete összesen (belső felület) m^2-ben kifejezve?
b) Miként aránylik a külső felület a belső felülethez?

4.2. Számítások móllal és származtatott moláris mértékegységekkel

Mól fogalma: 1 mól az a mennyiség, amely $6{,}022 \cdot 10^{23}$ (Avogadro szám) elemi részecskét (atom, molekula, esetleg töltés) tartalmaz. Jele: *n*. Mértékegysége (mol).

Moláris tömeg: 1 mól anyag tömege. Jele: *M*. Mértékegysége (g/mol). Másként a tömeg és az anyagmennyiség hányadosa.

Tömeg: moláris tömeg · mólok száma, azaz *m (g) = M (g/mol) · n (mol).*

Mólkoncentráció: oldott anyag móljainak száma 1 dm^3 (= 1 ℓ) oldatban. Jele: *c*. Mértékegysége (mol/dm^3). Kiszámítása: *c* (mol/dm^3) = oldott anyag móljainak száma (mol) / az oldat térfogata (dm^3) (azaz $c = n / V$).

Kísérlet:

Sósavval lecseppentünk egy szénsavas meszet tartalmazó talajt. A talaj a sósavas lecseppentés hatására pezsegni kezd. Mi történik?

$$\mathbf{CaCO_3 + 2\,HCl \rightarrow CaCl_2 + H_2O + CO_2}$$

Látható, hogy egy mól $CaCO_3$ két mól sósavval lép reakcióba!

Anyag	**Atomok moláris tömege (g/mol)**	**Moláris tömeg (g/mol)**
$CaCO_3$	40 + 12 + (3·16)	100,0
HCl	1+35,5	36,5
$CaCl_2$	40 + (2·35,5)	111,0
H_2O	(2·1) + 16	18,0
CO_2	12 + (2·16)	44,0

A lecseppentéshez használt sósavat vizes oldatban használtuk.

- 1 mólos oldat: 1 mól anyagot 1 ℓ vízben oldunk fel. A HCl esetében 36,5 g HCl-ot oldunk 1 ℓ vízben. Jelölése 1 M HCl.
- 2 ℓ mennyiségű 1 M HCl 2 mól HCl-ot tartalmaz.
- 1 mól $CaCO_3$ –hoz 2 mol HCl-ra van szükség (ld. reakcióegyenlet). Ez az anyagmennyiség 1 ℓ 2M HCl, vagy 2 ℓ 1 M HCl oldatban van jelen.

26. feladat

Hány gramm $CaCO_3$ reagál 5 ml 0,1 M HCl-val?

27. feladat

10 g elporított ismeretlen anyagot 25 ml 2 M HCl -vel kezeltünk. A reakció teljes. Oldatunkat ezt követően 1 M NaOH -val titráljuk. A titrálás során 3 ml 1 M NaOH fogyott.

Kérdés: Hány százalékos az anyag szénsavas mésztartalma ($CaCO_3$)?

4.3. pH fogalma, pH -val kapcsolatos számítások

A ***pH*** vizes oldatok savasságát/lúgosságát jelző mérőszám, a víz hidrogénion koncentrációjának (tízes alapú) negatív logaritmusa. Azaz $pH = -lg([H^+] / c_0$.

(c_0 = 1 mol/dm^3 a standard koncentráció)

Mivel 1 dm^3 („tiszta”) vízben 10^{-7} mol vízmolekula disszociál H^+ és OH^- ionokra, ezért a semleges kémhatás pH értéke 7.

Mivel a pH is „p”, azaz logaritmikus skála, ezért annak mértékegysége nincs!

Vízionszorzat (Kv) a víz disszociációjára jellemző egyensúlyi állandó. $Kv = [H+] \cdot [OH-] / c_0$. A fentiekből következően $Kv = 10^{-7} \cdot 10^{-7} = 10^{-14}$ mol/dm^3

28. feladat

Mekkora az oldat pH-ja, ha 25 ml 0,15 mol/dm^3 koncentrációjú NaOH oldatot adunk 20 ml 0,18 mol/dm^3 koncentrációjú HCl oldathoz? A térfogatok összeadódnak! $Kv = 1{,}0 \cdot 10^{-14}$

29. feladat

Mekkora az oldat pH-ja, ha 25 ml 0,15 mol/dm^3 koncentrációjú NaOH oldatot adunk 20 ml 0,19 mol/dm^3 koncentrációjú HCl oldathoz? A térfogatok összeadódnak! $Kv = 1{,}0 \cdot 10^{-14}$

5. Függvénytani feladatok

5.1. Függvénytani feladatok megoldásához szükséges fogalmak

Ebben a részben a teljesség igénye nélkül kiemeltük azokat a középiskolában is szereplő fogalmakat, amelyek a feladatok megoldásához különösen szükségesek. A feladatoknál a legtöbb esetben szükség van a függvények ábrázolására, ezért röviden utalunk a függvények képére (az alábbiakban mindig a derékszögű koordinátarendszerben előálló képet értjük), de részletes kifejtésre itt nincs mód. A kritétium-dolgozatoknál a függvény-ábrázolásokkal kapcsolatban az az elvárás, hogy néhány – a feladathoz illeszkedő – konkrét érték jelölésével, valamint a függvény általános képét figyelembe véve, közelítőleg ábrázolják a hallgatók a függvényt. A függvények ábrázolásánál az az alapelv, hogy a vízszintes tengelyen szerepeljen a független változó, a függőleges tengelyen pedig a függő változó. Ettől eltérni csak akkor indokolt, ha a független változó a magasságot/mélységet fejezi ki (ami természetföldrajzi feladatoknál gyakori), ilyenkor a magasság kerül a függőleges tengelyre. Társadalmi, gazdasági jelenségek vizsgálatakor gyakran kétírányúak a kapcsolatok, ezért egy-egy jellemző egyaránt lehet függő vagy független változó.

A földrajzi feladatoknál az ábrázolás egyik sajátossága, hogy a nagyságrendi különbségek, illetve a gyakran előforduló hatványfüggvények és exponenciális függvények miatt logaritmikus skálázást alkalmazunk a koordinátarendszer tengelyein. Ennek módszerét az alábbi rövid áttekintés végén találhatjuk meg.

A földrajzi vizsgálatokban a determinisztikus (egyértelmű) függvénykapcsolatokkal szemben gyakoribbak az ún. sztochasztikus (valószínűségi) kapcsolatok, ezekkel a – statisztikai, területi elemzési kurzusokon szereplő – *regressziószámítás* során találkozhatnak majd.

Elsőként a függvényekkel kapcsolatos alapvető definíciókat mutatjuk be:

- Függvény: Egyértelmű hozzárendelési szabály (de itt jegyezzük meg, hogy visszafelé már nem biztos, hogy egyértelmű a hozzárendelés).
- Értelmezési tartomány (D_f): Az a halmaz, amelynek elemeire a hozzárendelési szabályt értelmezzük (ezt elvben mindig meg kell adni a függvényhez). Földrajzi feladatoknál az értelmezési tartomány gyakran szűkebb, mint amennyit „a függvény megengedne", ilyenkor a jelenség földrajzi tartalmából kell kiindulni.
- Képhalmaz: Az a halmaz, amely tartalmazza a hozzárendelt elemeket (de esetleg bővebb annál) – általában ezt is meg szokták adni a függvények definiálásakor.
- Értékkészlet (R_f): A függvény által fölvett értékek összessége (ez része a képhalmaznak).

A függvények futásának jellemzéséhez használhatók az alábbi fogalmak:

- Korlátosság: Egy függvény alulról korlátos, ha létezik olyan valós szám, amelynél az összes függvényérték nagyobb. Egy függvény felülről korlátos, ha létezik olyan valós szám, amelynél az összes függvényérték kisebb. Egy függvény korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.
- Monotonitás: Egy függvény monoton nő, ha $\forall x,y \in D_f$: $x<y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Egy függvény szigorúan monoton nő, ha $\forall x,y \in D_f$: $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$. A különbség tehát abban áll, hogy szigorú monotonitás esetén a függvényérték határozottan nő, míg a másik esetben egyenlő is lehet. (Felhívjuk a figyelmet arra, hogy egyes iskolákban a monoton nő helyett a monoton nemcsökkenő kifejezést használják, és a szigorúan monoton nő helyett a monoton nő kifejezést. Ez utóbbi kifejezéspár nyakatekertsége miatt mi inkább az elsőként közölt kifejezéseket használjuk.) Egy függvény monoton csökken, ha $\forall x,y \in D_f$: $x<y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$. Egy függvény szigorúan monoton csökken, ha $\forall x,y \in D_f$: $x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$.

- Szélsőérték: A minimum és maximumértékeket nevezzük szélsőértéknek. Egy szélsőérték lehet lokális vagy abszolút. Egy függvényérték abszolút szélsőérték, ha az összes többi függvényértéknél kisebb (minimum esetén), illetve ha az összes többi függvényértéknél nagyobb (maximum esetén). Egy függvényérték lokális szélsőérték, ha létezik egy olyan „kis" környezet az adott függvényhely körül, amelyen belül az adott függvényérték a legkisebb (minimum esetén) illetve a legnagyobb (maximum esetén) a függvényértékek közül.
- Változás mértéke: Egy függvény változásának mértékét, azaz a függvény képének meredekségét egy x_0 pontban *közelítőleg* az alábbi módon határozhatjuk meg:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

  Ez a módszer egyenessel jellemezhető (lineáris) szakaszokra ad pontos értéket. Ahol a függvény képe görbül, ott deriválás segítségével adható meg a pontos érték, ez azonban nem tartozik az alapismeretek közé. Földrajzi adatok feldolgozása esetén a fenti formula általában jól használható.
- Periodicitás: Egy függvény periodikus, ha $\exists p \ni R^+$ $\forall x \ni D_f$: $f(x+p)=f(x)$. A legkisebb ilyen p a függvény periódusa
- Inverzfüggvény: f függvény inverze f^{-1}, ami a hozzárendelési szabály megfordítását jelenti, azaz ha $f: x \to y$, akkor $f^{-1}: y \to x$. Megjegyzendő, hogy az inverzfüggvény nem minden esetben létezik (csak akkor, ha a hozzárendelés visszafelé is egyértelmű). Az inverzfüggvény képét úgy kaphatjuk, hogy az eredeti függvény képét tükrözzük az $y=x$ egyenesre.

A továbbiakban a függvénytípusok definícióit mutatjuk be:

- Polinomfüggvény:

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \quad f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{, ahol } a_n \neq 0,\ n\in\mathbf{N}$$

  $f(x)$ polinom fokszáma n.
  A polinomfüggvények speciális esete (és földrajzi feladatokban gyakran szerepel) a lineáris függvény, másképpen az elsőfokú polinom. Ennek képlete: $f(x) = ax+b$ (ahol $a \neq 0$). A lineáris függvény képe egyenes. A lineáris függvény inverze mindig lineáris.
  Szintén a polinomfüggvények közé tartozik a másodfokú függvény is ($f(x) = ax^2+bx+c$, ahol $a \neq 0$). A másodfokú függvény képe parabola. A másodfokú függvény zérushelyeinek száma 0, 1 vagy 2. A másodfokú függvény felírható gyöktényezős alakban is (ha vannak zérushelyek): $f(x) = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, ahol x_1 és x_2 a zérushelyeket jelenti.
  A magasabb fokú polinomok képe összetettebb, melyeken maximálisan n-1 „hajlás" (azaz lokális minimum v. maximum) fordulhat elő.

- Racionális törtfüggvény:
  Két polinomfüggvény hányadosaként felírható függvény. Ezeknél a legbővebb értelmezési tartományt úgy kaphatjuk meg, hogy a valós számok halmazából kivesszük a nevező zérushelyeit. A racionális függvények képe általában összetett, ábrázolásuk bonyolult. Az egyszerűbb eseteket azonban tudni kell, ilyen például az $f(x) = 1/x$ függvény, melynek képe egy hiperbola, mely aszimptotikusan simul a tengelyekhez.

– Hatványfüggvény:

$f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R} \quad f(x)=a\cdot x^b,\ ahol\ a,b\in \mathbf{R}\setminus\{0\}$

Ez egy nagyon összetett függvénycsoport. $b>1$ esetén a másodfokú függvényhez hasonlít, $b=1$ esetén lineáris, $0<b<1$ esetén a gyökfüggvényhez hasonlít, $b<0$ esetén az $1/x$ függvényhez hasonlít.

Itt jegyezzük meg, hogy egyes függvények akár több csoportba is besorolhatók, pl. az $f(x)=1/x^2$ függvény tekinthető racionális függvénynek és hatványfüggvénynek is, az $f(x) = x^3$ tekinthető polinomnak, racionális függvénynek vagy hatványfüggvénynek is.

– Exponenciális függvény:

$f:\mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad f(x)=c\cdot a^x,\ ahol\ a>0,\ a\neq 1,\ c\neq 0$

Nagyon fontos különbség a hatványfüggvényekhez, polinomokhoz képest, hogy itt a kitevőben van a változó!

Az exponenciális függvény $c>0$ esetén, ha $a>1$, akkor gyorsuló ütemben monoton növő, ha $0<a<1$, akkor lassuló ütemben monoton csökkenő, a függvénygrafikon megfelelő vége aszimptotikusan simul az x tengelyhez.

Az exponenciális függvények között kitüntetett szerepű az e alapú exponenciális függvény, ahol az e egy fontos matematikai állandó (Euler-féle szám), értéke ~2,718.

– Logaritmus függvény:

$f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R} \quad f(x)=\log_a x,\ ahol\ a>0,\ a\neq 1$

A logaritmusfüggvény az exponenciális függvény inverze (azonos alapszám esetén). A logaritmus függvény, ha $a>1$, akkor lassuló ütemben monoton növő, ha $0<a<1$, akkor lassuló ütemben monoton csökkenő, a függvénygrafikon megfelelő vége aszimptotikusan simul az y tengelyhez.

Az e^x függvény inverze az $\ln x$ függvény (az ln rövidítés a „logarithmus naturalis” azaz természetes alapú logaritmus kifejezésből származik).

– Trigonometrikus függvények (szögfüggvények):

Elsőként a szögek megadásának módját tisztázzuk:

1) Hagyományosan legelterjedtebb a fok (°), ami a teljes kör 360-ad része.

2) Matematikailag legkézenfekvőbb a radián. 1 *rad* az a szög, melyhez egység sugarú körben egység hosszú ív tartozik.

3) Földrajzi feladatokban a lejtő meredekségét gyakran nem fokban, hanem százalék (%)-ban adják meg. Ez azt mutatja meg, hogy egy 100 m alaphosszúságú lejtőn hány méter szintkülönbség van.

Átszámítások:

teljes kör = $360° = 2\pi$ radián $\to$ $1°=\pi/180$ radián, illetve 1 radián = $180°/\pi \approx 57{,}3°$

ha a meredekség x %, akkor $\tan\alpha = x/100 \to \alpha = \arctan(x/100)$

Egyszerűbb esetekben (és a földrajzi példák sokszor ilyenek) a *sin*, *cos* és *tan* definíciójához elég a derékszögű háromszög alapján történő definíció. Ez a szokásos jelölésekkel (a,b befogók, c átfogó, a-val szemben α, b-vel szemben β szög):

$$\sin\alpha=\frac{a}{c} \quad \cos\alpha=\frac{b}{c} \quad \mathrm{tg}\,\alpha=\tan\alpha=\frac{a}{b}$$

Ugyanakkor ahhoz, hogy a valós számok teljes halmazán értelmezhető legyen a *sin* és a *cos* függvény, szükség van az általános definícióra is, mely szerint

sin α az α irányszögű egységvektor *y* koordinátája,

cos α pedig az α irányszögű egységvektor *x* koordinátája,

$tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, feltéve, hogy cos $\alpha \neq 0$.

A függvények képét itt most nem részletezzük, de felhívjuk a figyelmet arra, hogy mivel a *sin, cos* és *tan* visszafelé nem egyértelmű függvények a teljes értelmezési tartományukat tekintve, ezért megfordításuk (inverzük) csak megfelelő intervallumokra leszűkítve adható meg. Ennek egyik következménye, hogy a számológépek nem adják meg az összes megoldást az *y=sin x* típusú egyenletek esetén! Az inverzfüggvények nevei: $sin^{-1}\, x = arc\ sin\ x$, $cos^{-1}\, x = arc\ cos\ x$ és $tan^{-1}\, x = arc\ tan\ x$.

A *sin x, cos x* és *tan x* periodikus függvények. Míg a *sin x* és a *cos x* periódusa 2π, addig a *tan x* periódusa π.

Periodikus változásokat gyakran a *sin* függvény segítségével lehet leírni, ehhez fontos tudni, hogy az $f(x) = sin(kx)$ függvény periódusa $\frac{2\pi}{k}$.

Bár a tangens rövidítése magyarul hagyományosan *tg*, ám a számoló- és számítógépek elterjedésével egyre inkább a *tan* rövidítés válik meghatározóvá, így a jegyzetben mi is ezt használjuk.

Logaritmikus skálázás

Ha az adatokban nagyságrendi különbségek fordulnak elő, akkor indokolt a logaritmikus skálázás. Lineáris koordinátatengely esetén az értékek lineárisan nőnek a távolsággal, tehát pl. 0; 5; 10; 15; … egyenlő távolságokra helyezkednek el egymástól. Logaritmikus skálázás esetén az értékek logaritmusa nő a távolsággal egyenes arányban, tehát pl. 0,01; 0,1; 1; 10; 100; … helyezkednek el egymástól egyenlő távolságra. Fontos megjegyzés, hogy logaritmikus skálázás csak pozitív értékek esetén alkalmazható és nincs a tengelynek 0 pontja! Ez a megoldás a „nagy” értékeket „közelebb hozza”, viszont a „kis” értékek közti különbségeket „felnagyítja”.

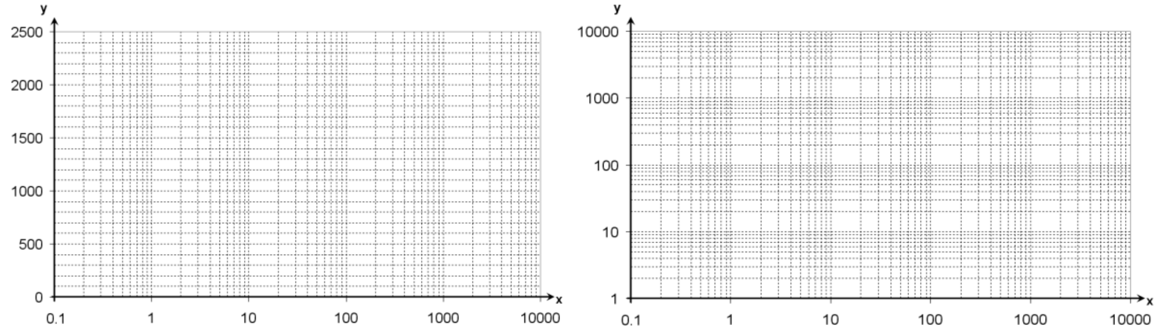
Ha függvényeket ábrázolunk, akkor lehet csak az *x*, vagy csak az *y*, vagy mindkét tengely logaritmikus skálájú (ld. *1. ábra*). Ha egyértelműen jelezni kívánjuk, hogy miről van szó, akkor az első két esetben szemi-logaritmikus koordinátarendszerről beszélünk és megadjuk, hogy melyik tengelyre alkalmazzuk a logaritmikus skálázást, az utóbbi esetben egyszerűen logaritmikus (vagy angolosan *log-log*) koordinátarendszerről beszélünk. A logaritmikus skálázás természetesen megváltoztatja a függvények képét is:

hatványfüggvény $\rightarrow$ logaritmikus (log-log) ábrázolás esetén lesz egyenes (*2. ábra*)

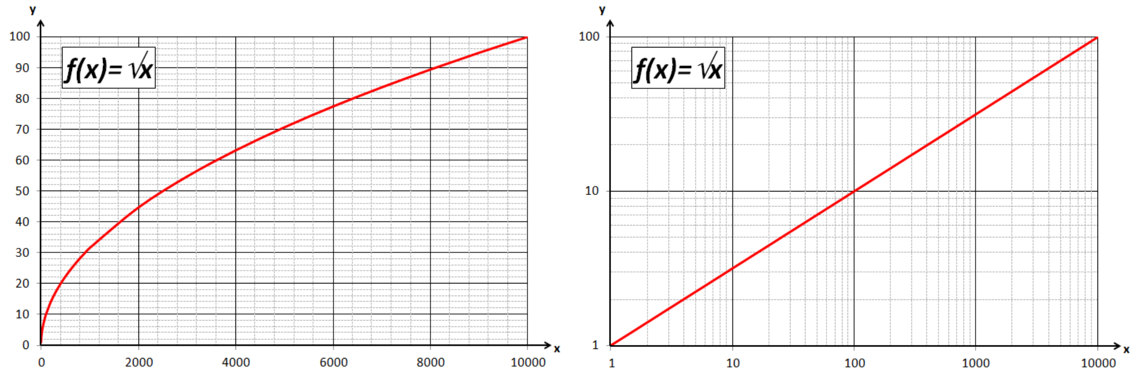
exponenciális függvény $\rightarrow$ az *y* tengelyt megváltoztató szemilogaritmikus skálázás esetén lesz egyenes (*3. ábra*)

logaritmus függvény $\rightarrow$ az *x* tengelyt megváltoztató szemilogaritmikus skálázás esetén lesz egyenes (*4. ábra*)

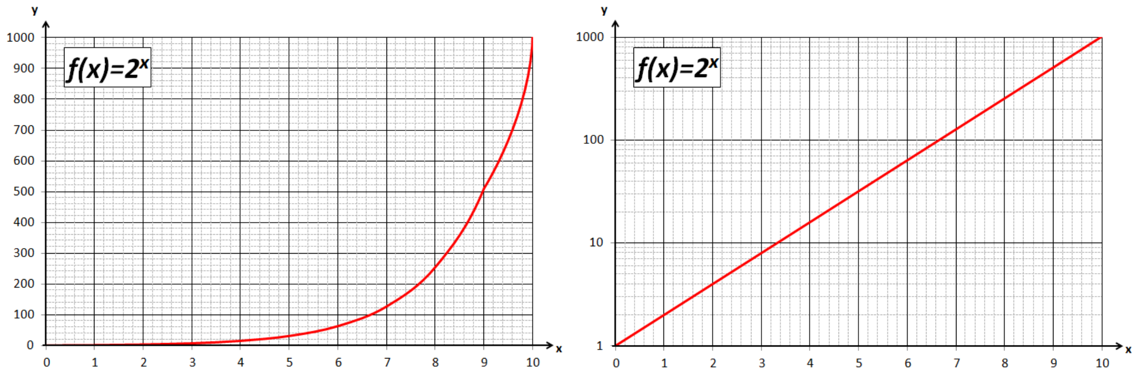
(A dolgozatokban gyakran előforduló keveredés miatt külön megjegyezzük, hogy a „logaritmikus skálázás” illetve a „logaritmus függvény” az itt leírtak értelmében két különböző dolog.)



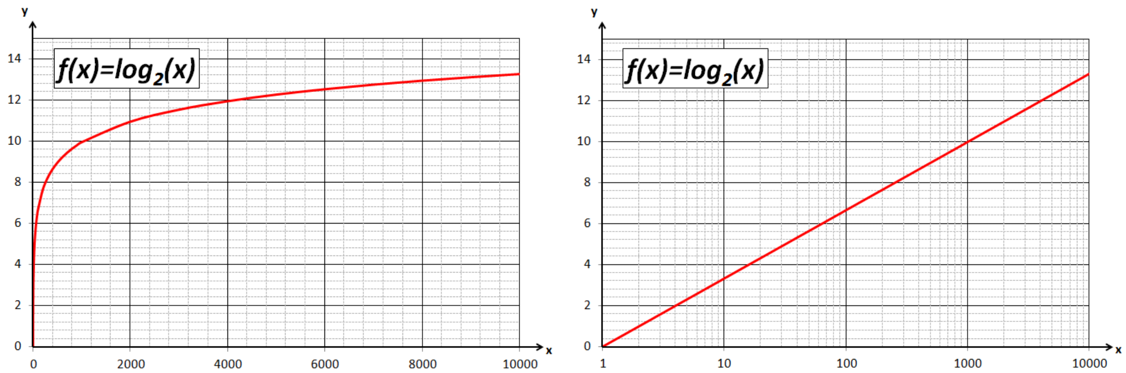
1. ábra: balra: szemi-logaritmikus koordinátarendszer, ahol az x tengely logaritmikus, az y tengely lineáris; jobbra: logaritmikus (log-log) koordinátarendszer, ahol mindkét tengely logaritmikus skálájú



2. ábra: hatványfüggény képe lineáris ill. logaritmikus koordinátarendszer esetén



3. ábra: exponenciális függény képe lineáris ill. szemi-logaritmikus(y) koordinátarendszer esetén



4. ábra: logaritmus függény képe lineáris ill. szemi-logaritmikus (x) koordinátarendszer esetén

5.2. Feladatok

Definíciók ismeretét vizsgáló feladatok

30. feladat

Adja meg a hatvány-függvények általános definícióját!

31. feladat

Az alábbi függvényegyenleteket hozza egyszerűbb alakra (ha lehet), és adja meg, hogy milyen függvénytípusba tartoznak.

a) $f(x) = e^{3\cdot\ln(x)}$ b) $g(x) = \dfrac{2x+3}{5x^2+2x-6}$ c) $h(x) = -2x^{-0,5}$

d) $i(x) = 5x - 3x^7$ e) $j(x) = \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x}$ f) $k(x) = 3\cos(\arccos(x))$

g) $l(x) = \dfrac{5}{(x+2)^3}$ h) $m(x) = \lg(10^{4x+2})$ i) $n(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$

32. feladat

Írjon példát az alábbi függvénytípusokra:

a) negatív kitevős hatványfüggvény;
b) lineáris függvény;
c) hatodfokú polinomfüggvény;
d) 8π periódusú szögfüggvény!

Lineáris függvényekhez kapcsolódó feladatok

33. feladat

Magashegyi túránkhoz beszereztünk egy olyan órát, amelyik a légnyomás alapján jelzi a magasságot. Feltételezésünk szerint a troposzféra alsó részében a légnyomás (*p*, [hPa]) lineárisan változik a magassággal (h,[m]). Írja fel a *p(h)* függvényt, ha tudjuk, hogy 800 m-en a légnyomás: 927,8 hPa, míg 1200 m-en a légnyomás: 885,2 hPa! Milyen magasan járunk, ha a légnyomás 799,8 hPa? Ábrázolja a függvényt a [0 m; 3000 m] intervallumon! Mennyi a 100 m szintkülönbségre jutó légnyomás-változás? Írja fel *p(h)* inverzfüggvényét!

34. feladat

Egy hegységben az évi középhőmérséklet (*T*, [°C]) függőleges változásait vizsgáljuk. Méréseink szerint 1000 m-en a középhőmérséklet 5,4°C, 1450 m-en pedig 2,6°C. Ha lineáris függőleges hőmérsékletváltozást tételezünk fel, akkor mennyi lesz az évi középhőmérséklet 2000 m magasan? Írja fel a hőmérsékletet a magasság (*h*, [m]) függvényében! Ábrázolja a *T(h)* függvényt a [0 m; 2000 m] intervallumon! Határozza meg az inverzfüggvényét is (ezt már nem kell ábrázolni)!

35. feladat

A Zagyva folyó egyik részvízgyűjtőjén végzett mérések alapján a területről lefolyt évi átlagos vízmennyiség (*L*, [mm]) lineárisan függ a csapadék éves mennyiségétől (*C*, [mm]). 420 mm éves csapadék esetén a lefolyás 15,54 mm, 835 mm éves csapadék esetén pedig 113,895 mm. Írja fel az *L(C)* függvényt és ábrázolja a [400 mm; 900 mm] intervallumon! Számítsa ki, hogy mennyi az évi átlagos lefolyás értéke 650 mm éves csapadék esetén!

36. feladat

Egy mélyfúrásban megmértük a hőmérsékletet 1050 m mélyen, ahol 38,31°C-nak adódott és 1910m mélyen, ahol pedig 57,402°C volt. A mélység jele: *d*, a hőmérsékleté: *T*. Írja fel a lineárisnak feltételezett *T(d)* függvényt! Mennyi a geotermikus gradiens? Ennek alapján mennyi a felszíni átlaghőmérséklet? Ábrázolja a függvényt a [0 m; 3000 m] intervallumon!

37. feladat

Egy térképrészlet kelet-nyugati és észak-déli koordinátáit át kell számolni lineárisan az egyik rendszerből a másikba. A térkép bal-alsó sarkának koordinátái az első rendszerben: (600; 1200), a második rendszerben: (312000; 284000). A jobb-felső sarok koordinátái az első rendszerben: (800; 1600), a második rendszerben: (313000; 286000). A koordináták jelölése: az első rendszerben: *(X; Y)*, a második rendszerben: *(A; B)*. Adja meg a koordináták közti átszámító függvények közül az *A(X)* függvényt, és ennek inverzét is!

Másodfokú függvényekhez kapcsolódó feladatok

38. feladat

Budapesten a Duna vízhozama (*Q*, [m^3/s]) és vízállása (*h*, [cm]) között az alábbi függvénykapcsolatot sikerült kimutatni: $Q = 0{,}0047h^2 + 5{,}4613h + 428{,}63$. Milyen típusú függvényről van szó? Az elsőfokú árvíz-készültség 620 cm-es vízállásnál lép életbe. Állapítsa meg, hogy ekkor mennyi a folyó vízhozama! Ábrázolja a vízhozamot a vízállás függvényében a [200 cm; 800 cm] intervallumon!

39. feladat

Kavicsdobálással mérjük a mélységet. A szabadon eső test által megtett út: $s(t) = ½ \cdot g \cdot t^2$, ahol $g(=9{,}81\ m/s^2)$ a gravitációs gyorsulás. Számolja ki, hogy egy 100 méteres mélységbe ledobott kavics hány másodperc után koppan! Írja fel az *s(t)* függvény inverzét! Ábrázolja az inverz függvényt az [1 m; 100 m] intervallumon lineáris koordinátarendszerben, illetve olyan koordinátarendszerben, hogy a függvény képe egyenes legyen! Mi ennek a koordinátarendszernek a neve?

Hatványfüggvényekhez kapcsolódó feladatok

40. feladat

Egy karsztvidéken a töbrök területe (*A*, [m^2]) és hossza (*d*, [m]) között az alábbi összefüggést állapították meg: $A(d)=1{,}078 \cdot d^{1{,}813}$. Ábrázolja ezt a függvényt a [10 m; 500 m] intervallumon lineáris koordinátarendszerben és olyan koordinátarendszerben, hogy a függvény grafikonja egyenes legyen! Mi ennek a koordinátarendszernek a neve? (Válaszát indokolja is!) Milyen hosszú az a töbör, amelynek a területe 20 000 m^2?

41. feladat

Egy kisebb területen végzett vízrajzi statisztika szerint a vízfolyások hossza (*L*, km) az alábbi módon függ a vízgyűjtőterület nagyságától (*A*, [km^2]): $L=1{,}4 \cdot A^{0{,}6}$. Ábrázolja a függvényt az [1 km^2; 50 km^2] intervallumon lineáris koordinátarendszerben és olyan koordináta-rendszerben, hogy a függvény grafikonja egyenes legyen! Mi ennek a koordinátarendszernek a neve? Írja föl az *L(A)* függvény inverzét! Milyen típusú függvény az inverz-függvény?

42. feladat

Egy 50 km^2 területű részről űrfelvételt készítünk. 1 képpont (pixel) oldalhosszát méterben megadva jelölje *x*. 1 képponthoz tartozó információmennyiség 24 byte. A teljes kép mérete byte-ban megadva: *S*. Írja fel az *S(x)* függvényt! Mekkora a felbontás (*x*), ha a képméret 480 kbyte ($=480\cdot10^3$ byte)? Ábrázolja lineáris skálájú koordinátarendszerben az *S(x)* függvényt a [10 m; 1000 m] intervallumon; illetve olyan koordinátarendszerben, hogy a képe egyenes legyen! Mi ennek a koordinátarendszernek a neve?

Exponenciális függvényekhez kapcsolódó feladatok

43. feladat

Szuperország GDP-je a vizsgált időszak kezdetén 10^9 dollár és évi 15,2%-kal nő. Hány év alatt duplázza meg az ország a GDP-jét? Ábrázolja a folyamatot lineáris koordinátarendszerben a [0 év; 10 év] intervallumon és olyan koordinátarendszerben, hogy a függvény grafikonja egyenes legyen! Mi ennek a koordinátarendszernek a neve? (Válaszát indokolja is!)

44. feladat

Egy ország népessége (*N,* fő) 1960. jan. 1-től 1980. jan.1-ig 8 millióról 10 millióra nőtt. Ebben a vándorlások csupán elenyésző szerepet játszottak. Mennyi volt a természetes szaporodás (*r,* [‰]) éves értéke ebben az országban, ha erre a 20 évre állandó ütemű természetes szaporodást tételezünk fel? Mekkora volt a népesség 1970. jan.1-jén? Ábrázolja a népesség alakulását az idő (*t,* [év]) függvényében az [1960; 1980 év] intervallumon lineáris koordinátarendszerben, illetve olyan koordinátarendszerben, hogy a függvény képe egyenes legyen! Mi ennek a koordinátarendszernek a neve?

45. feladat

Egy gyár bevétele 2010-ben 200 000 EUR, 2011-ben 205 500 EUR volt. Két forgatókönyvet vizsgálunk. Az első szerint a gyár bevétele lineárisan növekszik a 2010-2011 között megfigyelt változásnak megfelelően. A második szerint a 2010-2011-es ütemmel egyező mértékű exponenciális növekedés várható. Mennyi lesz a gyár bevétele 2030-ban lineáris, ill. exponenciális növekedés esetén? Ábrázolja mindkét függvényt a [2010; 2030 év] intervallumon közös koordinátarendszerben!

46. feladat

A ^{14}C-szénizotóp felezési ideje 5730 év, ennyi idő alatt csökken a szénizotóp anyagmennyisége a felére. A radioaktív bomlás egyenlete: $N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda t}$, ahol N_0 a radioaktív "szülő"-izotóp kezdeti tömege, $N(t)$ pedig a t idő után megmaradt tömege, λ a bomlásra jellemző konstans érték. Határozza meg a ^{14}C-szénizotóphoz tartozó λ értéket! Számítsa ki, hogy 20 000 év alatt hányadrészére csökken az eredeti ^{14}C-szénizotóp mennyiség (az arányt %-ban adja meg)! Ábrázolja a ^{14}C-szénizotóp tömegének változását az idő függvényében a [0; 20 000 év] intervallumon lineáris koordinátarendszerben (a kiindulási tömeget tekintse 1-nek)!

Logaritmus függvényekhez kapcsolódó feladatok

47. feladat

A földrengések erősségét leggyakrabban a Richter-skálán mérik. A rengés erősségét (magnitúdóját) a mérőműszer (szeizmográf) kilengésének amplitúdója (*A*, [mikron]) határozza meg. A Richter-skála szerinti magnitúdó az amplitúdó tízes alapú logaritmusával egyenlő. Mekkora a kilengések amplitúdójának egymáshoz viszonyított aránya egy 6-os és egy 4-es magnitúdójú földrengés esetén?

Trigonometrikus függvényekhez kapcsolódó feladatok

48. feladat

Melyik lejtő meredekebb: a 10%-os vagy a 6°-os? Határozza meg, hogy 100 m szintkülönbséghez mekkora vízszintes távolság tartozik a 10%-os ill. a 6°-os lejtő esetén?

49. feladat

Egy folyó esése egy 79 km hosszú alföldi szakaszon 65 cm. Mekkora e folyószakasz meredeksége %-ban, radiánban illetve fokban kifejezve?

50. feladat

Egy túra hossza a térképen mérve (azaz felülnézetben) az induló ponttól a hegycsúcsig: L = 3456 m. A túrán ténylegesen mennyi utat kell megtenni (d, [m]), és milyen magas a hegy a kiinduló ponthoz képest (h, [m]), ha a lejtőszög végig kb. 15°? v = 2,5 km/h átlagsebességgel haladva hány óráig (t, [h]) tart az út?

51. feladat

Egy légifelvételen egy 31 méter magas épület árnyéka 42 méter hosszúnak látszik. Mennyi volt a felvétel készítésekor a napsugarak beesési szöge (α) fokban kifejezve?

52. feladat

Egy homokdűne keresztmetszetét vizsgáljuk. A dűne aszimmetrikus: egyik oldalán a lejtőszög 12°, a másik oldalán 34°, a lejtőit egyenesnek tekintjük. A keresztmetszet hossza 20 méter. Készítsen rajzot! Milyen magas (h) a homokdűne (ebben a keresztmetszetben)?

6. Megoldások

6.1. Mutatószámokkal és egyszerűbb statisztikai paraméterekkel kapcsolatos feladatok megoldásai

1. feladat

A népességszám változása: 10 198 315 – 9 937 628 = 260 687 fő

A migrációs egyenleg: 387 205 – 260 687 = **126 518 fő volt a migrációs egyenleg a vizsgált időszakban**.

2. feladat

Bejutó víz: $63\,725 + 9 \cdot 10^{6} \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 72\,725$ m^3

Kikerülő víz: $5100 + 23\,540 + 12\,300 \cdot 10^{-3} = 28\,652{,}3$ m^3

Egyenleg: 72 725 – 28 652,3 = **44 072,7 m^3-rel nőtt meg a tó térfogata**.

3. feladat

1 cm térképen → 20 000 cm = 0,2 km a valóságban

$(3\cdot 0{,}2)^2$ = **0,36 km^2 területet kell felmérni.**

4. feladat

a) 25°C-on 100% esetében 23 g/m^3, így 39% esetében: $39 \cdot 23 / 100$ = 8,**97 g/m^3 az abszolút vízgőztartalom**.

b) 8,97 g/m^3 esetében ~10°C-nál van a harmatpont, azaz 25 – 10 = 15°C-ot kell csökkennie a hőmérsékletnek, és ha 100 méterenként 1°C-ot csökken, akkor $15 \cdot 100$ méter, azaz **1500 méter magasságban van a harmatpont.**

5. feladat

a) x = Hortobágyi Nemzeti Park területe; y = Kiskunsági Nemzeti Park területe

(i) $x - y = 260$

(ii) $x + y + 391 + 199 + 235 + 501 + 511 + 568 + 603 + 440 = 4672$

Első egyenletből:

$x = 260 + y$

Második egyenletbe behelyettesítve:

$260 + y + y + 391 + 199 + 235 + 501 + 511 + 568 + 603 + 440 = 4672$

$2y = 964$

$y = 482$

Ebből:

$X = 260 + 482 = 742$

Azaz a **Hortobágyi Nemzeti Park területe 742 km^2**, a K**iskunsági Nemzeti Park területe 462 km^2.**

b) A **legnagyobb területű a Hortobágyi Nemzeti Park**, a **legkisebb területű pedig az Aggteleki Nemzeti Park.**

6. feladat

a) Lakónépesség a városokban: 9 937 628 – 3 033 770 = 6 903 858 fő

Városi lakosság aránya: $6\,903\,858 / 9\,937\,628 \cdot 100 \approx$ **69,47 %, a lakónépesség ennyi %-a élt a városokban**.

b) Lakónépesség a városokban a fővároson kívül:

6 903 858 – 1 729 040 = 5 174 818 fő

Városi lakosság aránya a fővároson kívül: $5\,174\,818 / 9\,937\,628 \cdot 100 \approx$ **52,07%, a lakónépesség ennyi %-a élt városokban a fővároson kívül**.

7. feladat

a) 2 342 550 · 0,62 = 1 452 381 fő aktív

1 452 381 – 1 257 750 = 194 631 fő volt munkanélküli

194 631 / 1 452 381 · 100 = **13,4% volt a munkanélküliségi ráta**

b) 194 631 · 0,102106 = **19 873 fő volt tartós munkanélküli**.

8. feladat

<18 év: 3680 · 0,05 · 0,25 = **46 kérdőív kell a 18 év alattiak esetében**.

18-60 év: 3680 · 0,05 · 0,5 = **92 kérdőív kell a 18-60 évesek esetében.**

>60 év: 3680 · 0,05 · 0,25 = **46 kérdőív kell a 60 év felettiek esetében**.

9. feladat

A védett erdők nagysága: 180 · 0,45 · 0,7 = 56,7 km^2

A védett rét, legelő nagysága: 180 · 0,1 · 0,42 =7,56 km^2

A védett vízfelület nagysága: 180 · 0,05 = 9 km^2

Összesen: 56,7 + 7,56 + 9 = **73,26 km^2** lett védett.

10. feladat

Kavics: (63+45) / 150 · 100 = **72% kavics a hordalékban**.

Homok: (32+7) / 150 · 100 = **26% homok a hordalékban**.

11. feladat

4 fő · 6 éjszaka · 21 euró · 0,85 · 300 forint = **128.520 forintot kell beváltanunk.**

12. feladat

a) Csapadék által érintett terület: 107 · 0,2 = 21,4 km^2, ez 21,4 · 10^6 m^2

Erre a területre hullott csapadék mennyisége: 21,4 · 10^6 · 3 · 10^{-3} = 64,2 · 10^3 m^3

A patakba jutott csapadék mennyisége: 0,05 · 64,2 · 10^3= **3,21 · 10^3 m^3 csapadékvíz jutott a patakba.**

b) Megnövekedett vízhozam: 1,5 · 0,294 = 0,441 m^3/s

Egy óra alatt átjutó mennyiség: 60 · 60 · 0,441 = 1587,6 m^3

Normálalakban megadva: **1,5876 · 10^3 m^3 víz jut át egy óra alatt.**

13. feladat

a) Középhőmérséklet: a négy fix időpontban mért érték számtani átlaga

(10,3+10,2+18,5+16,2) / 4 ≈ **13,8°C volt a napi középhőmérséklet**.

b) Hőingás: maximum-minimum = 20,3 – 9,9 = **10,4°C volt a napi hőingás**.

14. feladat

a) Alföld (hat megye) népessége: 522+363+412+543+390+565 = 2795 ezer fő

Alföld (hat megye) területe: 8445+5631+4263+6211+5582+5936 = 36 068 km^2

Alföld népsűrűsége: 2795·1000 / 36 068 ≈ **77 fő/km^2 az Alföld népsűrűsége**.

b) A hat alföldi megye népességének átlaga:

(522+363+412+543+390+565)/6 ≈ **466 ezer fő**

c) Népsűrűség értékek:

Bács-Kiskun: 522 · 1000 / 8445 ≈ 62 fő/km^2

Békés: 363 · 1000 / 5631 ≈ 64 fő/km^2

Csongrád: 412 · 1000 / 4263 ≈ 97 fő/km^2

Hajdú-Bihar: 543 · 1000 / 6211 ≈ 87 fő/km^2

Jász-Nagykun-Szolnok: 390 · 1000 / 5582 ≈ 70 fő/km^2

Szabolcs-Szatmár-Bereg: 565 · 1000 / 5936 ≈ 95 fő/km^2

Legnagyobb népsűrűségű Csongrád megye: 97 fő/km^2, legkisebb népsűrűségű Bács-Kiskun megye: 62 fő/km^2.

15. feladat

a) A bázis index esetében:
2006: 19 798 / 19 798 · 100 = 100%; 2007: 21 361 / 19 798 · 100 = 108%;
2008: 22 024 / 19 798 · 100 = 111%; 2009: 18 886 / 19 798 · 100 = 95%
2010: 21 466 / 19 798 · 100 = 108%; 2011: 23 788 / 19 798 · 100 = 120%
A lánc index esetében:
2007: 21 361 / 19 798 · 100 = 108%;
2008: 22 024 / 21 361 · 100 = 103%; 2009: 18 886 / 22 024 · 100 = 86%
2010: 21 466 / 18 886 · 100 = 114%; 2011: 23 788 / 21 466 · 100 = 111%

	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Érték (folyó áron, Mrd Ft)	19 798	21 361	22 024	18 886	21 466	23 788
Bázis index (%)	**100**	**108**	**111**	**95**	**108**	**120**
Lánc index (%)	**–**	**108**	**103**	**86**	**114**	**111**

b) Maximum bázis index érték: 120% (2011); Minimum bázis index érték: 95% (2009)
120% – 95% = **25 százalékpont volt az eltérés a maximum és a minimum érték között.**
c) **2010-ben, mert 114% volt az ipari termelés láncindexe, azaz 14%-kal nőtt az előző évhez képest az ipari termelés.**

16. feladat

a) Népsűrűség legyen kisebb mint 80 fő/km^2,
GDP/fő legyen kisebb, mint 2 670 940 · 0,65 = 1 736 111 Ft
- Bács-Kiskun megye: népsűrűsége 528 418 / 8445 ≈ 63 fő/km^2,
egy főre jutó GDP-je 898 952 · 1 000 000 / 528 418 ≈ 1 701 214 Ft
- Békés megye: népsűrűsége 366 556 / 5631 ≈ 65 fő/km^2,
egy főre jutó GDP-je 538 507 · 1 000 000 / 366 556 ≈ 1 469 099 Ft
- Csongrád megye: népsűrűsége 423 240 / 4263 ≈ 99 fő/km^2,
egy főre jutó GDP-je 825 749 · 1 000 000 / 423 240 ≈ 1 951 018 Ft
- Hajdú Bihar megye: népsűrűsége 541 298 / 6211 ≈ 87 fő/km^2,
egy főre jutó GDP-je 1 057 370 · 1 000 000 / 541 298 = 1 953 397 Ft
- Jász-Nagykun-Szolnok megye: népsűrűsége 390 775 / 5582 ≈ 70 fő/km^2,
egy főre jutó GDP-je 656 799 · 1 000 000 / 390 775 ≈ 1 680 760 Ft.
- Szabolcs-Szatmár-Bereg megye: népsűrűsége 560 429 / 5936 ≈ 94 fő/ km^2,
egy főre jutó GDP-je 798 748 · 1 000 000 / 560 429 ≈ 1 425 244 Ft.

Bács-Kiskun, Békés és Jász-Nagykun-Szolnok megyék esetében valósul meg a két feltétel együttesen.

b)

	GDP/fő < 1 736 111 Ft	GDP/fő >= 1 736 111 Ft
Népsűrűség >= 80 fő/km^2	Szabolcs-Szatmár-Bereg	Hajdú-Bihar, Csongrád,
Népsűrűség < 80 fő/km^2	Bács-Kiskun, Békés, Jász-Nagykun-Szolnok	-

17. feladat

a) Export terjedelme: 134 506 – 3 842 =130 664
Import terjedelme: 126 439 – 3 479 =122 960
Export (számtani) átlaga: (81 468+134 506+56 743+127 584+3 842) / 5=80 829
Import (számtani) átlaga: (70 285+126 439+60 474+65 223+3 479) / 5=65 180
Export relatív terjedelme: Q_e = 130 664 / 80 829 = **1,62**
Import relatív terjedelme: Q_i = 122 960 / 65 810 = **1,89**
b) Mivel $Q_i > Q_e$, így az **import esetében nagyobb az egyenlőtlenség nagysága**.

18. feladat

a) Teljes népesség 2000-ben: 42 299+25 661+12 646+8 329+15 211 = 104 146 ezer fő
Arányok országonként:
$(42\,299 / 104\,146)^2 \approx 0{,}1650$; $(25\,661 / 104\,146)^2 \approx 0{,}0607$;
$(12\,646 / 104\,146)^2 \approx 0{,}0147$; $(8\,329 / 104\,146)^2 \approx 0{,}0064$;
$(15\,211 / 104\,146)^2 \approx 0{,}0213$
Összeadva: K_{2000} = **0,2681 volt a koncentrációs mutató értéke**.
b) Mivel 0,2681 > 0,2633 így **a népesség területi koncentrációja nőtt**.

19. feladat

A két várost összekötő út egyenlete:
v (300-100; 250-150) = (200; 100)
100x – 200y = 10000 – 30000, azaz x – 2y = –200
Behelyettesítés:
$150 - 2\cdot 250 = -350$, ami nem egyenló –200-zal, azaz **nem megy át Közepes településen az út.**

20. feladat

a) de = $\sqrt{(5-(-7))^2+(8-15)^2} \approx 13{,}89$ Távolság (euklideszi) = **138,9 km**
dm = | 5 – (–7) | + | 8 – 15 | = 19 Távolság (manhattan) = **190 km**
b) Alsó városhoz tartozó vonzáskörzet sugara: $r_A = \sqrt{750/\pi} \approx 15{,}45$ km
Felső városhoz tartozó vonzáskörzet sugara: $r_F = \sqrt{3000/\pi} \approx 30{,}91$ km
Mivel 15,45 + 30,91 = 46,36 km és 46,36 km < 138,9 km így a **két város vonzásköre NEM metszi egymást**.
c) $(1-5)^2 + (5-8)^2 = 25 > 1{,}545^2$
$(1+7)^2 + (5-15)^2 = 164 > 3{,}091^2$
A kör egyenletébe helyettesítve Középső település koordinátáit, kiderül, hogy egyik kör területén belül sincs a pont. **Egyik város vonzáskörzetébe sem tartozik bele Középső település.**

6.2. Mértékegységekkel kapcsolatos feladatok megoldásai

21. feladat

1500 Gt = $1500 \cdot 10^9 \cdot 10^6 = 1500 \cdot 10^{15}$ g = 1500 Pg

22. feladat

1 cm	=	10^7 nm
1 μm	=	10^{-4} cm
1 nm	=	10^{-6} mm

23. feladat

1 m^2	=	10^4 cm^2	(10^2 cm · 10^2 cm)
1 ha	=	10^4 m^2	(10^2 m · 10^2 m)
1 cm^2	=	10^8 μm^2	(10^4 μm · 10^4 μm)

24. feladat

1 cm^3	=	10^{-3} l = 1 ml	
1 dm^3	=	1 l = 1000 ml	
1 cm^3	=	10^{12} μm^3	(10^4 μm · 10^4 μm · 10^4 μm)
1 m^3	=	1000 l	(10^3 dm^3 = 10 dm · 10 dm · 10 dm)

25. feladat

a./ feladat

A kocka magassága 1 cm = 10^{-2} m

Ebben 10^7 db ($10^{-2} / 10^{-9} = 10^7$) lamella fér el.

A lamellák összességének felülete $10^7 \cdot 2 \cdot 1$ cm^2 = $2 \cdot 10^7$ cm^2 = 20 millió cm^2

(Azért kell a 2-szeres szorzó, mert a lamellának 2 oldala van)

Mennyi ez m^2-ben? 1 m^2 = 10 000 cm^2 = 10^4 cm^2, tehát

$(2 \cdot 10^7) / 10^4 = 2 \cdot 10^3 = 2000$ m^2

b./ feladat

6 cm^2 / 2000 m^2 $\rightarrow$ $6 / (2 \cdot 10^3 \cdot 10^4) = 6 / 20\,000\,000 = 3 / 10\,000\,000$

26. feladat

- Hány mól HCl-van 0,1 M HCl-ban?
  - 0,1 mol l^{-1} · 0,005 l = 0,0005 mol = $5 \cdot 10^{-4}$ mol HCl
- Ez a mennyiség fele ennyi $CaCO_3$-tal való reakcióhoz elég $\rightarrow$ $2,5 \cdot 10^{-4}$ mol
- Mennyi ez tömegegységben?
  - $2,5 \cdot 10^{-4}$ $mol^{-1} \cdot 10^2$ g mol^{-1} = $2,5 \cdot 10^{-2}$ g = **0,025 g**

27. feladat

Mennyi HCl fogyott el a reakcióban? NaOH titrálással tudjuk meg.

A reakció az alábbiak szerint megy végbe: **HCl + NaOH → NaCl + H_2O**

3 ml 1 M NaOH oldat NaOH mennyisége 1,5 ml 2 M NaOH-nak felel meg, tehát a reakcióhoz 25,0 – 1,5 = **23,5 ml 2 M HCl** –ra volt szükség.

23,5 ml 2 M HCl hány mól HCl-t tartalmaz?

$$\frac{1000}{23{,}5} = \frac{2}{x} \qquad x = \frac{2 \cdot 23{,}5}{1000} = 2 \cdot 23{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

Mivel 1 mól szénsavas mész 2 mól sósavval reagál,

$CaCO_3$ mennyisége = 23,5 · 10^{-3} mol

$CaCO_3$ moláris tömege = 100 g/mol

m_{CaCO3} = 23,5 · 10^{-3} mol · 100 g/mol = 2,35 g

10 g anyagra számítva ez 23,5 %

28. feladat

A reakció az alábbiak szerint megy végbe: **HCl + NaOH → NaCl + H_2O**

Ki kell számolni a sav és a lúg anyagmennyiségét, majd meg kell határozni, hogy melyik marad feleslegben a reakció lejátszódása után. Ennek három lehetséges kimenete van:

(a) Sav marad feleslegben → meg kell határozni a maradék sósav koncentrációját. Mivel a sósav erős elektrolit, ez esetben a maradó HCl koncentrációja alapján kell a pH-t kiszámolni. pH = –lg [H^+] (A sósav teljesen disszociál, így molekulánként egy db H^+ ion szabadul fel.)

(b) Lúg marad feleslegben. Ebben az esetben meg kell határozni a maradék nátrium-hidroxid koncentrációját. A nátrium-hidroxid erős elektrolit, így egy db OH^- ion szabadul fel. [H^+] = Kv(c_0) / [OH^-], ahol $K_V = 10^{-14}$; c_0 = 1 mol/dm^3. pH = –lg [H^+]

(c) Elfogy mind a sav, mind a lúg. Ilyenkor az oldatban a pH-t a víz disszociációjából származó hidrogénionok mennyisége határozza meg, azaz a pH=7.

<u>A sósav anyagmennyisége:</u>

$n_{HCl} = c_{HCl} \cdot V_{HCl}$ = 0,18 mol/dm^3 · (20 · 10^{-3}) dm^3 = 3,6 · 10^{-3} mol

A nátrium-hidroxid anyagmennyisége:

$n_{NaOH} = c_{NaOH} \cdot V_{NaOH}$ = 0,15 mol/dm^3 · (25 · 10^{-3}) dm^3 = 3,75 · 10^{-3} mol

A reakcióban 1 db sósav 1 db nátrium-hidroxiddal reagál, tehát nátrium-hidroxid marad feleslegben. A maradék nátrium-hidroxid anyagmennyisége: 0,15 · 10^{-3} mol

Maradék c_{NaOH} = 0,15 · 10^{-3} mol / 45 · 10^{-3} dm^3 = 3,3 10^{-3} mol/dm^3

[H^+] = Kv(c_0) / [OH^-] = 10^{-14} / 3,3 10^{-3} mol/dm^3 = 0,30 · 10^{-10} mol/dm^3

pH = –lg [H^+] = –lg [0,30 · 10^{-11}] = 11,52

29. feladat

A sósav anyagmennyisége:

$n_{HCl} = c_{HCl} \cdot V_{HCl} = 0{,}19 \text{ mol/dm}^3 \cdot (20 \cdot 10^{-3}) \text{ dm}^3 = 3{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$

A nátrium-hidroxid anyagmennyisége:

$n_{NaOH} = c_{NaOH} \cdot V_{NaOH} = 0{,}15 \text{ mol/dm}^3 \cdot (25 \cdot 10^{-3}) \text{ dm}^3 = 3{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$

A reakcióban 1 db sósav 1 db nátrium-hidroxiddal reagál, tehát sósav marad feleslegben. A maradék sósav mennyisége:

$3{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ mol [HCl]} – 3{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ mol [NaOH]} \rightarrow [H^+] = 0{,}05 \cdot 10^{-3} \text{ mol} / 45 \cdot 10^{-3} \text{ dm}^3$

$pH = –\lg [H^+] = –\lg [0{,}05 / 45] = 2{,}95$

6.3. Függvénytani feladatok megoldásai

Definíciók ismeretét vizsgáló feladatok

30. feladat

$f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R} \quad f(x) = a \cdot x^b$, *ahol* $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

31. feladat

a) a hatványozásra vonatkozó azonosságok és *ln* definíciójának felhasználásával:

$f(x) = e^{3 \cdot \ln(x)} = \left(e^{\ln(x)}\right)^3 = x^3$

ez egy **harmadfokú polinomfüggvény** (a függvénybesorolásos feladatok megoldásánál elég, ha a legegyszerűbb választ fogalmazzuk meg, de megjegyezzük, hogy ez a függvény tekinthető hatványfüggvénynek is, sőt akár racionális törtfüggvénynek is. A későbbiekben ezeket a további besorolásokat már külön nem említjük.)

b) nem egyszerűsíthető; mivel két polinomfüggvény hányadosáról van szó, ezért ez egy **racionális törtfüggvény**

c) nem egyszerűsíthető; ez egy **hatványfüggvény**

d) nem egyszerűsíthető; egy egy **7-edfokú polinomfüggvény**

e) $j(x) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

ez egy **exponenciális függvény** (mert a változó a kitevőben van)

f) mivel az *arccos x* a *cos x* inverzfüggvénye, ezért

$k(x) = 3\cos(\arccos(x)) = 3x$

ez egy **lineáris függvény** (más szóval: elsőfokú polinom)

g) nem egyszerűsíthető; mivel két polinomfüggvény hányadosáról van szó, ezért ez egy **racionális törtfüggvény**

h) a logaritmus definíciója alapján:

$m(x) = lg\,(10^{4x+2}) = 4x+2$

ez egy **lineáris függvény** (más szóval: elsőfokú polinom)

i) $n(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}}$

ez egy **hatványfüggvény**

32. feladat

Itt természetesen végtelen sok jó megoldás elképzelhető, az alábbiakban minden típusra egy példát írunk:

a) $f(x) = x^{-1}$

b) $g(x) = 10x+1$

c) $h(x) = x^6$

d) mivel *sin (kx)* periódusa $2\pi/k$, ezért ahhoz, hogy a periódus 8π legyen, *k*-t ¼-nek kell választani:

$i(x) = \sin(¼ \cdot x)$

Lineáris függvényekhez kapcsolódó feladatok

33. feladat

Mivel feltételezésünk szerint *p(h)* függvény lineáris, ezért $p(h)=ah+b$ alakú. Ebbe a képletbe behelyettesítve a két ismert értéket két egyenletet kapunk két ismeretlennel.

i) $927{,}8 = a \cdot 800 + b$

ii) $885{,}2 = a \cdot 1200 + b$

i)-ből kivonva ii)-öt:

$42{,}6 = -400 \cdot a$

$a = -0{,}1065$ hPa/m

Ezt behelyettesítve i) egyenletbe:

$b = 927{,}8 - a \cdot 800 = 1013$ hPa

Tehát $\boldsymbol{p(h) = -0{,}1065 \cdot h + 1013}$

Második kérdés: $p(h)=799{,}8$ hPa $\rightarrow h^*=?$

$799{,}8 = -0{,}1065 \cdot h^* + 1013$

$h^* = (799{,}8-1013) / (-0{,}1065) =$ **2001,9 m**

Ábrázolás: először kiszámítjuk a légnyomást 0 m-en és 3000 m-en

$p(0) = -0{,}1065 \cdot 0 + 1013 = 1013$ hPa

$p(3000) = -0{,}1065 \cdot 3000 + 1013 = 693{,}5$ hPa

Ezt a két pontot ábrázoljuk, és mivel lineáris a függvény, ezért egy egyenessel összekötjük. Mivel a független változónk a magasság, ezért indokolt ezt tenni a függőleges tengelyre.

A 100 m szintkülönbségre jutó légnyomás-változás kiszámítása. Mivel az *a* értéke az 1 m-re jutó légnyomás-változást fejezi ki, ezért a 100 m szintkülönbségre jutó légnyomás-változás ennek 100-szorosa, azaz **-10,65 hPa / 100m**.

***p(h)* inverzfüggvénye**:

$p = -0{,}1065 \cdot h + 1013$ függvényegyenletet átrendezzük úgy, hogy *h* legyen kifejezve *p* segítségével:

$h = (p - 1013) / (-0{,}1065) = \boldsymbol{-9{,}3897 \cdot p + 9511{,}7}$

34. feladat

Mivel feltételezésünk szerint *T(h)* függvény lineáris, ezért $T(h)=ah + b$ alakú. Ebbe a képletbe behelyettesítve a két ismert értéket két egyenletet kapunk két ismeretlennel.

i) $5{,}4 = a \cdot 1000 + b$

ii) $2{,}6 = a \cdot 1450 + b$

i)-ből kivonva ii)-öt:

$2{,}8 = -450 \cdot a$

$a = -0{,}00622$ °C/m

Ezt behelyettesítve i) egyenletbe:

$b = 5{,}4 - a \cdot 1000 = 11{,}62$ °C

Tehát $\boldsymbol{T(h) = -0{,}00622 \cdot h + 11{,}62}$

$T(2000) = ?$

$T(2000) = -0{,}00622 \cdot 2000 + 11{,}62 =$ **-0,82°C**

Ábrázolás: kiszámítjuk a hőmérsékletet 0 m-en és 2000 m-en

$T(0) = -0{,}00622 \cdot 0 + 11{,}62 = 11{,}62$ °C

$T(2000) = -0{,}82$°C

Ezt a két pontot ábrázoljuk, és mivel lineáris a függvény, ezért egy egyenessel összekötjük. Mivel a független változónk a magasság, ezért indokolt ezt tenni a függőleges tengelyre.

***T(h)* inverzfüggvénye**:

T = -0,00622· h + 11,62 függvényegyenletet átrendezzük úgy, hogy h legyen kifejezve T segítségével:

$h = (T – 11,62) / (-0,00622) =$ **-160,772·** $\boldsymbol{T}$ **+ 1868,167**

35. feladat

Mivel feltételezésünk szerint *L(C)* függvény lineáris, ezért *L(C)=aC + b* alakú. Ebbe a képletbe behelyettesítve a két ismert értéket két egyenletet kapunk két ismeretlennel.

i) $15,54 = a \cdot 420 + b$

ii) $113,895 = a \cdot 835 + b$

ii)-ből kivonva i)-et (hogy kevesebb előjel legyen):

$98,355 = 415 \cdot a$

a = 0,237 mm/mm

Ezt behelyettesítve az i) egyenletbe:

$b = 15,54 – a \cdot 420 = -84$ mm

Tehát ***L(C)* = 0,237 · *C* – 84**

Ábrázolás: kiszámítjuk az évi átlagos lefolyást 400 mm, illetve 900 mm csapadékra

$L(400) = 0,237 \cdot 400 – 84 = 10,8$ mm

$L(900) = 0,237 \cdot 900 – 84 = 129,3$ mm

Ezt a két pontot ábrázoljuk, és mivel lineáris a függvény, ezért egy egyenessel összekötjük.

$L(650) = ?$

$L(650) = 0,237 \cdot 650 – 84 =$ **70,05 mm**

36. feladat

Mivel feltételezésünk szerint *T(d)* függvény lineáris, ezért *T(d)=ad + b* alakú. Ebbe a képletbe behelyettesítve a két ismert értéket két egyenletet kapunk két ismeretlennel.

i) $38,31 = a \cdot 1050 + b$

ii) $57,402 = a \cdot 1910 + b$

ii)-ből kivonva i)-et (hogy kevesebb előjel legyen):

$19,092 = 860 \cdot a$

a = 0,0222°C/m

Ezt behelyettesítve i) egyenletbe:

$b = 38,31 – a \cdot 1050 = 15$°C

Tehát ***T(d)* = 0,0222 · *d* + 15**

A **geotermikus gradiens** a 100 m mélységnövekedésre jutó hőmérséklet-változást fejezi ki. Mivel az a értéke az 1 m-re jutó hőmérséklet-változást fejezi ki, ezért a 100 m mélységnövekedésre jutó hőmérséklet-változás ennek 100-szorosa, azaz **2,22°C / 100m**.

Ábrázolás: először kiszámítjuk a hőmérsékletet 0 m-en és 3000 m-en

$T(0) = 0,0222 \cdot 0 + 15 =$ **15°C** (ez egyben a felszíni átlaghőmérséklet)

$T(3000) = 0,0222 \cdot 3000 + 15 = 81,6$°C

Ezt a két pontot ábrázoljuk, és mivel lineáris a függvény, ezért egy egyenessel összekötjük. Mivel a független változónk a mélység, ezért indokolt ezt tenni a függőleges tengelyre, méghozzá úgy, hogy lefelé növekedjen.

37. feladat

A lineáris $A(X)=aX + b$ átszámítófüggvény 600-hoz 312000-et, 800-hoz 313000-et rendel hozzá. Így két helyen ismerjük az értékét, amire két egyenlet írható fel:

i) $312000 = a \cdot 600 + b$

ii) $313000 = a \cdot 800 + b$

ii)-ből kivonva i)-et (hogy kevesebb előjel legyen):

$1000 = 200 \cdot a$

$a = 5$

Ezt behelyettesítve i) egyenletbe:

$b = 312000 – a \cdot 600 = 309000$

Tehát $\mathbf{A(X) = 5 \cdot X + 309000}$

Az inverzfüggvény:

$A = 5 \cdot X + 309000$ függvényegyenletet átrendezzük úgy, hogy X legyen kifejezve A segítségével:

$X = (A – 309000) / 5 = \mathbf{0{,}2 \cdot A – 61800}$

Másodfokú függvényekhez kapcsolódó feladatok

38. feladat

Ez egy másodfokú polinomfüggvény.

$Q(620) = 0{,}0047 \cdot 620^2 + 5{,}4613 \cdot 620 + 428{,}63 =$ **5621 m^3/s**

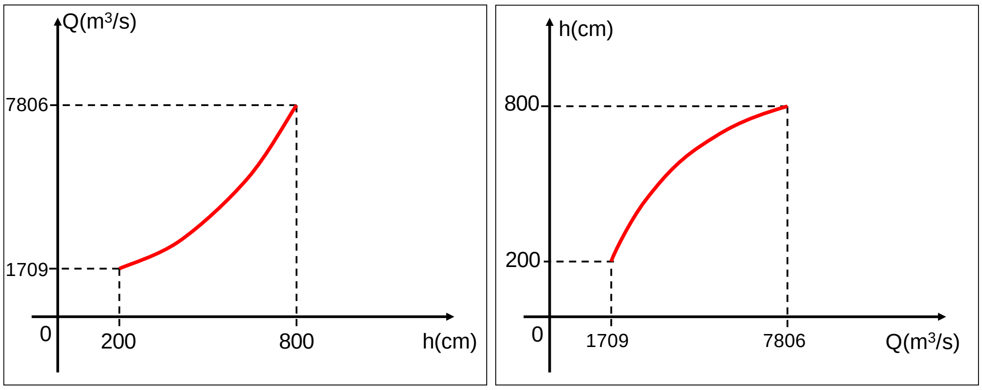
Ábrázolás: kiszámítjuk a folyó vízhozamát 200 cm és 800 cm vízállás esetén

$Q(200) = 1709\ m^3/s$

$Q(800) = 7806\ m^3/s$

Ezt a két pontot ábrázoljuk és egy parabola-ívvel összekötjük oly módon, hogy növekvő vízállás esetén gyorsabb ütemű vízhozam-növekedést mutasson (baloldali ábra).

Mivel a vízállás szintén magasságot fejez ki, ezért ezt is lehet úgy ábrázolni, hogy a függőleges tengelyen legyen a vízállás (a hidrológiai szakirodalomban mindkét fajta ábrázolás előfordul), ez esetben természetesen figyelni kell arra, hogy a parabola alakja a $\sqrt{x}$ függvényhez lesz hasonló (jobboldali ábra).



39. feladat

$s(t)=½·g·t^2$ egyenletbe behelyettesítjük a *100 m* mélységet és *g* értékét:

$100 = ½ \cdot 9{,}81 \cdot t^2$

$$t = \sqrt{\frac{100}{0{,}5 \cdot 9{,}81}} = \underline{4{,}515s}$$

az inverzfüggvény: $s=½·g·t^2$ függvényegyenletet átrendezzük *t*-re.

$$t = \sqrt{\frac{s}{0{,}5 \cdot 9{,}81}} = 0{,}4515 \cdot \sqrt{s} = 0{,}4515 \cdot s^{0,5}$$

Ábrázolás: időértékek kiszámítása 1 m ill. 100 m esetén

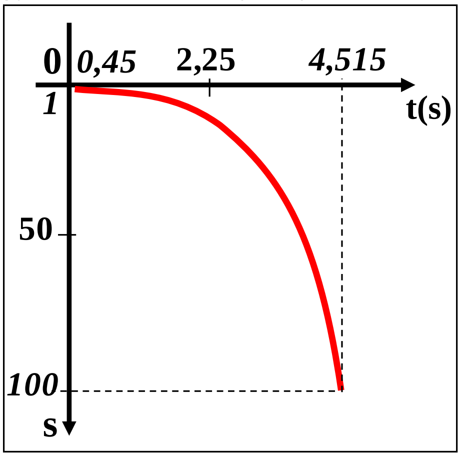
$t(1) = 0{,}4515$ s

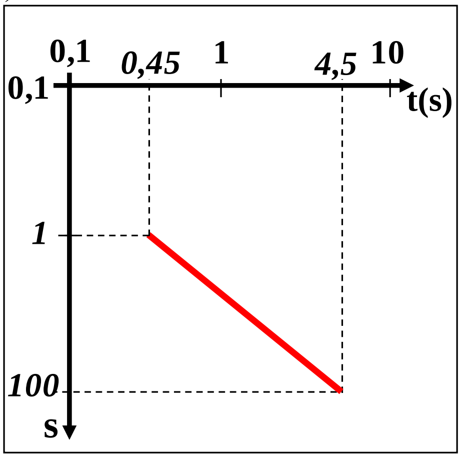
$t(100) = 4{,}515$ s

Mivel a független változónk a mélység (út), ezért indokolt ezt tenni a függőleges tengelyre, méghozzá úgy, hogy lefelé növekedjen az érték. Ezután a két adott pontot ábrázoljuk és egy parabola-ívvel összekötjük oly módon, hogy lefelé egyre meredekebb legyen a görbe (baloldali ábra).

Mivel hatványfüggvényről van szó, ezért a képe **logaritmikus koordinátarendszerben** lesz egyenes.

Ábrázolás log-log koordinátarendszerben: néhány 10-hatvány kiírásával jelöljük, hogy mindkét tengely logaritmikus, majd fölvesszük a két adott pontot és egy egyenessel összekötjük (jobboldali ábra).





Hatványfüggvényekhez kapcsolódó feladatok

40. feladat

Ábrázolás: kiszámítjuk a függvény értéket a kért intervallum végpontjaiban

$A(10) = 1{,}078 \cdot 10^{1,813} = 70{,}084 \text{ m}^2$

$A(500) = 1{,}078 \cdot 500^{1,813} = 84305 \text{ m}^2$

Ábrázoljuk ezt a két pontot, majd összekötjük egy görbével, mely jobbra haladva egyre meredekebb (mivel >1 kitevőjű hatványfüggvényről van szó; baloldali ábra)

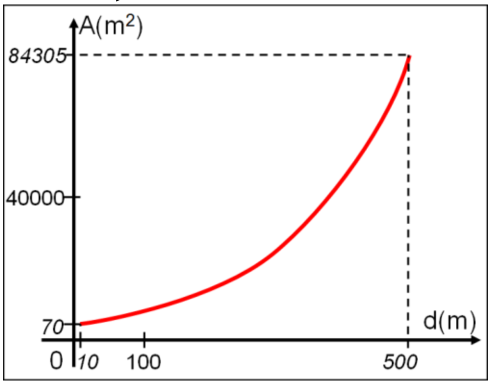
Mivel hatványfüggvényről van szó, ezért a képe **logaritmikus koordinátarendszerben** lesz egyenes.

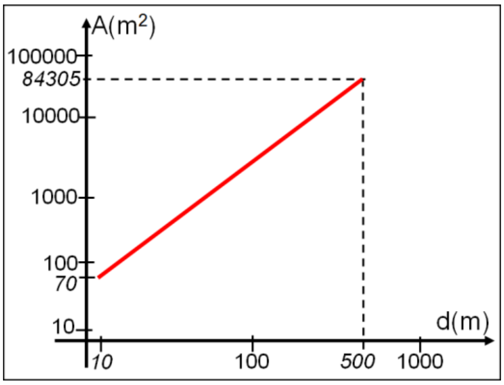
Ábrázolás log-log koordinátarendszerben: néhány 10-hatvány kiírásával jelöljük, hogy mindkét tengely logaritmikus, majd fölvesszük a két adott pontot és egy egyenessel összekötjük (jobboldali ábra).

$A(d^*) = 20\,000\ \text{m}^2 \rightarrow d^* = ?$
$20000 = 1{,}078 \cdot (d^*)^{1{,}813}$
$18553 = (d^*)^{1{,}813}$
A tört kitevőt úgy tudjuk „eltüntetni”, hogy reciprok hatványra emelünk:

$$18553^{\frac{1}{1{,}813}} = (d^*)^{1{,}813\frac{1}{1{,}813}} = d^*$$

d^* = **226,12 *m***





41. feladat

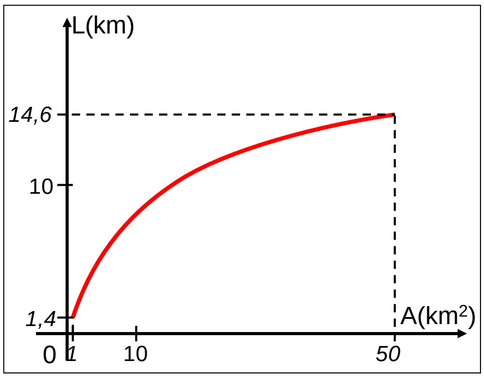
Ábrázolás: kiszámítjuk a függvény értéket a kért intervallum végpontjaiban
$L(1) = 1{,}4 \cdot 1^{0{,}6} = 1{,}4$ km
$L(50) = 1{,}4 \cdot 50^{0{,}6} = 14{,}64$ km
Ábrázoljuk ezt a két pontot, majd összekötjük egy görbével, mely jobbra haladva egyre kevésbé meredek (mivel 0 és 1 közötti kitevőjű hatványfüggvényről van szó; baloldali ábra)
Mivel hatványfüggvényről van szó, ezért a képe **logaritmikus koordinátarendszerben** lesz egyenes.

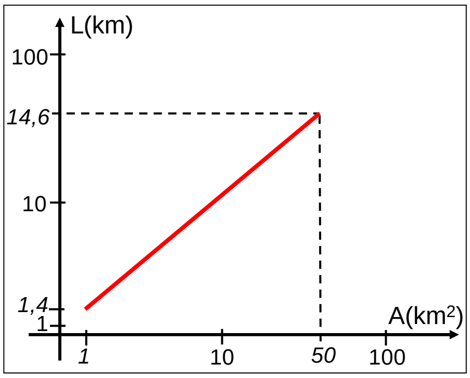
Ábrázolás log-log koordinátarendszerben: néhány 10-hatvány kiírásával jelöljük, hogy mindkét tengely logaritmikus, majd fölvesszük a két adott pontot és egy egyenessel összekötjük (jobboldali ábra).
Inverzfüggvény: Az L=1,4 · $A^{0{,}6}$ függvényegyenletet átrendezzük úgy, hogy A legyen kifejezve L segítségével:
$(L / 1{,}4) = A^{0{,}6}$
A tört kitevőt úgy tudjuk „eltüntetni”, hogy reciprok hatványra emelünk:

$$(L/1{,}4)^{\frac{1}{0{,}6}} = (A)^{0{,}6\cdot\frac{1}{0{,}6}}$$

$$L^{1{,}667} \cdot (1/1{,}4)^{1{,}667} = A$$

$A = 0{,}5708 \cdot L^{1{,}667}$ Az **inverzfüggvény is hatványfüggvény**.





42. feladat

1 pixel területe [m²]: x^2.

Teljes terület: 50 km² = $50 \cdot 10^6$ m².

A teljes területet lefedő pixelek száma: $50 \cdot 10^6 / x^2$.

$S(x) = (50 \cdot 10^6 / x^2) \cdot 24 = \mathbf{1{,}2 \cdot 10^9 / x^2 = 1{,}2 \cdot 10^9 \cdot x^{-2}}$

$S(x) = 480 \cdot 10^3$ byte $\rightarrow x = ?$

$480 \cdot 10^3 = 1{,}2 \cdot 10^9 / x^2$

$$x = \sqrt{\frac{1{,}2 \cdot 10^9}{4{,}8 \cdot 10^5}} = \mathbf{50\ m}$$

Ábrázolás: kiszámítjuk a függvény értéket a kért intervallum végpontjaiban

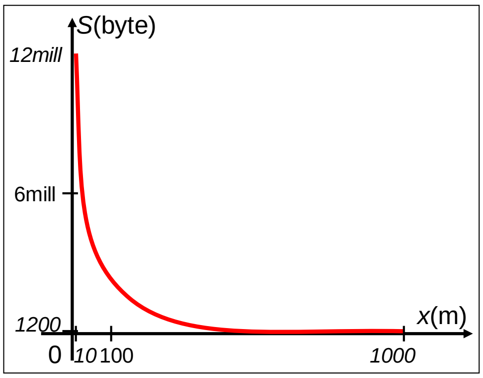
$S(10) = 1{,}2 \cdot 10^9 / 10^2 = 1{,}2 \cdot 10^7$ byte

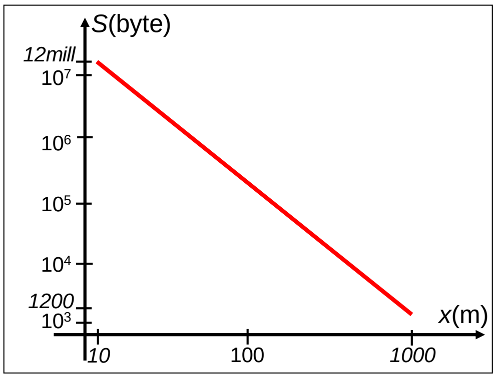
$S(1000) = 1{,}2 \cdot 10^9 / 1000^2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ byte

Ábrázoljuk ezt a két pontot, majd összekötjük egy csökkenő görbével, mely jobbra haladva egyre kevésbé meredek (mivel negatív kitevőjű hatványfüggvényről van szó; baloldali ábra)

Mivel hatványfüggvényről van szó, ezért a képe **logaritmikus koordinátarendszerben** lesz egyenes.

Ábrázolás log-log koordinátarendszerben: néhány 10-hatvány kiírásával jelöljük, hogy mindkét tengely logaritmikus, majd fölvesszük a két adott pontot és egy egyenessel összekötjük (jobboldali ábra).





Exponenciális függvényekhez kapcsolódó feladatok

43. feladat

Jelölje a GDP időbeli változását a *G(t)* függvény. *G(0)* a kezdeti érték. Ha az évi növekedés állandó ütemű (a % konstans), akkor exponenciális növekedésről van szó.

$G(t) = G(0) \cdot 1{,}152^t$

A duplázódás azt jelenti, hogy a kezdeti érték kétszeresére nő a GDP. Ez az idő [év] t_d.

$$2 \cdot G(0) = G(0) \cdot 1{,}152^{t_d}$$

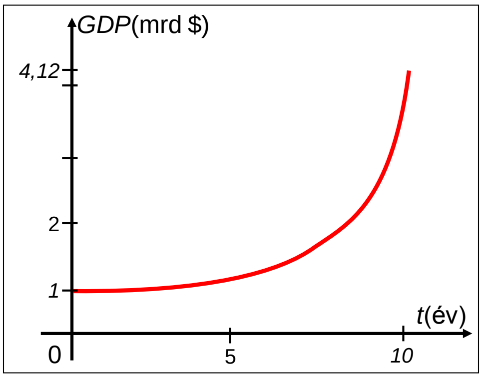
Mivel ez *G(0)*-lal leosztható, ebből látszik, hogy a duplázódás a kezdeti értéktől független, és csak a növekedés ütemétől függ.

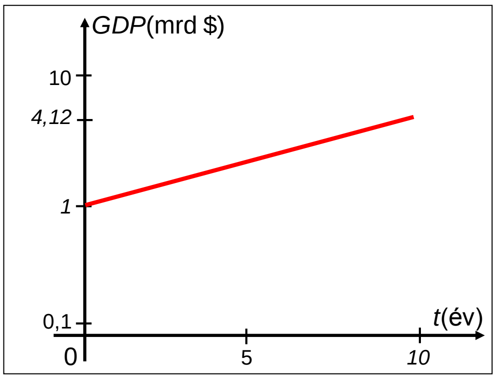
$$2 = 1{,}152^{t_d}$$

$lg\ 2 = t_d \cdot lg\ 1{,}152$

$t_d =$ **4,899 év**

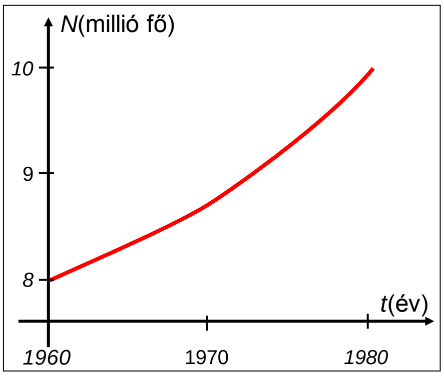
Ábrázolás: kiszámítjuk a függvény értéket a kért intervallum végpontjaiban
$G(0) = 10^9 \cdot 1{,}152^0 = 10^9$ dollár
$G(10) = 10^9 \cdot 1{,}152^{10} = 4{,}1165 \cdot 10^9$ dollár
Ábrázoljuk ezt a két pontot, majd összekötjük egy növekvő görbével, mely jobbra haladva egyre meredekebb (baloldali ábra)
Mivel exponenciális függvényről van szó, ezért a képe olyan **szemilogaritmikus koordinátarendszerben** lesz egyenes, ahol **a függőleges tengely logaritmikus skálázású.**
Ábrázolás szemilog koordinátarendszerben: néhány 10-hatvány kiírásával jelöljük, hogy a függőleges tengely logaritmikus, majd fölvesszük a két adott pontot és egy egyenessel összekötjük (jobboldali ábra).

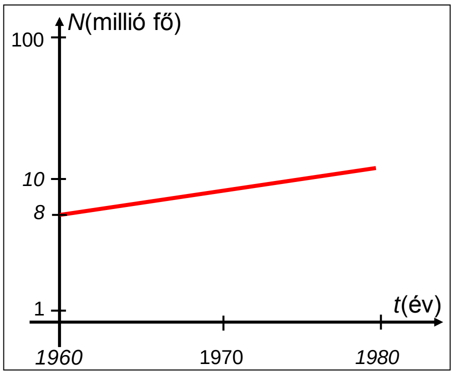




44. feladat

Jelölje a népesség időbeli változását az *N(t)* függvény. Ha a természetes szaporodás üteme állandó, akkor exponenciális növekedésről van szó.
$N(t) = N(0) \cdot (1+ r/1000)^t$
A t=0 időpont legyen 1960, és írjuk be a fenti képletbe az adatokat:
$10 \cdot 10^6 = 8 \cdot 10^6 \cdot (1 + r/1000)^{20}$
$1{,}25 = (1 + r/1000)^{20}$
$r = \left(\sqrt[20]{1{,}25} - 1\right) \cdot 1000 = 11{,}22\,‰$
A népesség 1970. jan. 1.-jén:
$N(10) = 8 \cdot 10^6 \cdot (1 + 11{,}22/1000)^{10}$ = $\mathbf{8{,}9443 \cdot 10^6}$ **fő**
Ábrázolás: adottak a függvény értékei a kért intervallum végpontjaiban
Ábrázoljuk ezt a két pontot, majd összekötjük egy növekvő görbével, mely jobbra haladva egyre meredekebb (baloldali ábra; figyelem, a tengelyek metszéspontja nem az origoban van)
Mivel exponenciális függvényről van szó, ezért a képe olyan **szemilogaritmikus koordinátarendszerben** lesz egyenes, ahol **a függőleges tengely logaritmikus skálázású**.
Ábrázolás szemilog koordinátarendszerben: néhány 10-hatvány kiírásával jelöljük, hogy a függőleges tengely logaritmikus, majd fölvesszük a két adott pontot és egy egyenessel összekötjük (jobboldali ábra).

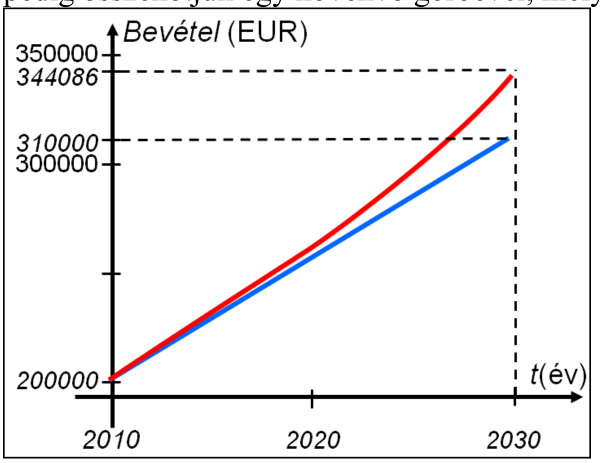




45. feladat

Jelölje *L(t)* a gyár bevételeinek alakulását lineáris forgatókönyv szerint.
Jelölje *E(t)* a gyár bevételeinek alakulását exponenciális forgatókönyv szerint.
t=0 időpont legyen 2010.
Lineáris forgatókönyv szerint az évi növekmény: 205 500 – 200 000 = 5500 EUR.
$L(t)$ = 5500 $\cdot\, t$ + 200 000
Exponenciális forgatókönyv szerint az évi növekedési ütem:
205 500 / 200 000 = 1,0275 alapján 2,75%.
$E(t)$ = 200 000 · $(1{,}0275)^t$
A 2030-as bevételek a két forgatókönyv szerint:
L(20) = 5500 · 20 + 200 000 = **310 000 EUR**
E(20) = 200 000 · $1{,}0275^{20}$ = **344 086 EUR**

Ábrázolás: adottak a függvények értékei a kért intervallum végpontjaiban
Ábrázoljuk ezeket a pontokat, majd a lineáris forgatókönyvnek megfelelő pontokat összekötjük egy egyenessel, az exponenciális forgatókönyvnek megfelelő pontokat pedig összekötjük egy növekvő görbével, mely jobbra haladva egyre meredekebb.



46. feladat

Felezési időt jelölje t_f. Ekkor

$$0{,}5 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_f}$$

N_0-lal leoszthatunk, ebből is látszik, hogy a felezési idő független a kiinduló anyagmennyiségtől.

$$0{,}5 = e^{-\lambda \cdot t_f}$$

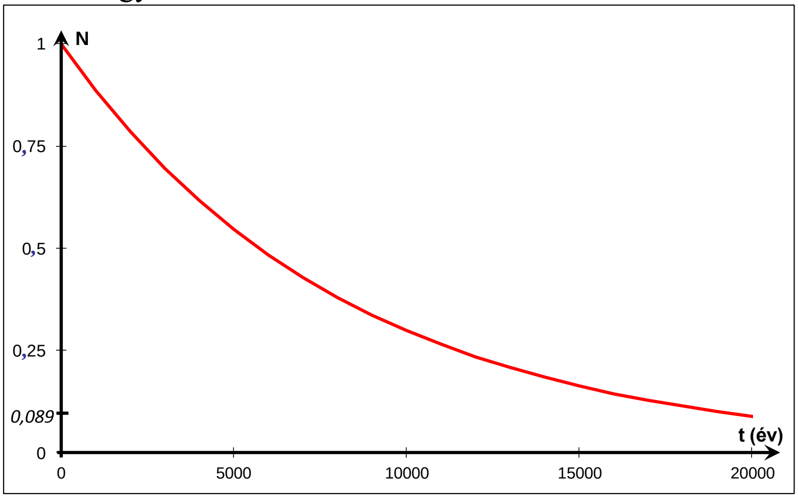
$$\ln 0{,}5 = -\lambda \cdot t_f$$

$$\lambda = -\frac{\ln(1/2)}{t_f} = -\frac{\ln 1 - \ln 2}{t_f} = -\frac{0 - \ln 2}{t_f} = \frac{\ln 2}{t_f} = \frac{\ln 2}{5730\ \acute{e}v} = \mathbf{1{,}2097 \cdot 10^{-4}}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\acute{e}v}}$$

$$\frac{N(20000)}{N_0} = \frac{N_0 \cdot e^{-1{,}2097 \cdot 10^{-4} \cdot 20000}}{N_0} = e^{-1{,}2097 \cdot 10^{-4} \cdot 20000} = e^{-2{,}4194} = 0{,}08898 = \mathbf{8{,}898\%}$$

Ábrázolás: adottak a függvény értékei a kért intervallum végpontjaiban (1 illetve 0,08898)

Ábrázoljuk ezt a két pontot, majd összekötjük egy csökkenő görbével, mely jobbra haladva egyre kevésbé meredek.



Logaritmus függvényekhez kapcsolódó feladatok

47. feladat

A magnitúdó: $M = \lg(A)$.

$M_1 = \lg(A_1) = 6$

$M_2 = \lg(A_2) = 4$

a logaritmusra vonatkozó azonosság alapján:

$\lg(A_2 / A_1) = \lg(A_2) - \lg(A_1) = 6 - 4 = 2$

$A_2 / A_1 = 10^2 = \mathbf{100}$

Trigonometrikus függvényekhez kapcsolódó feladatok

48. feladat

A 10%-os lejtőre: $\tan \alpha = 10 / 100 = 0{,}1 \rightarrow \alpha = \text{arc tan}\,(0{,}1) = 5{,}71°$

Mivel ez kevesebb, mint 6°, ezért a **6°-os lejtő a meredekebb**.

10%-os lejtő esetén: 100 m vízszintes távra jut 10 m szintkülönbség, tehát 100 m-es szintkülönbséghez **1000 m vízszintes távolság** tartozik.

6°-os lejtős esetén: $\tan(6°) = 100 / x \rightarrow x = 100 / \tan(6°) =$ **951,4 m a vízszintes táv**.

49. feladat

A mértékegységek átváltására kell figyelni!

A szintkülönbség: h = 65 cm = 0,65 m

A vízszintes távolság: L =79 km = 79 000 m

A meredekség: m = h / L = 0,65 / 79000 = $8{,}2278 \cdot 10^{-6}$ = $\mathbf{8{,}2278 \cdot 10^{-4}}$ **%**

m = tan $\alpha \rightarrow \alpha$ = arc tan m = $\mathbf{4{,}7142 \cdot 10^{-4}}$ **°**

$\alpha = 4{,}7142 \cdot 10^{-4} \cdot \pi/180 = \mathbf{8{,}2276 \cdot 10^{-6}}$ **rad**

50. feladat

A tényleges utat (d) úgy kell elképzelni, mint egy derékszögű háromszög átfogóját, ahol az egyik befogó a térképi (felülnézeti) távolság (L), a másik befogó a szintkülönbség (h). A lejtőszög alapján:

$h = L \cdot \tan \alpha = 3456 \cdot \tan (15°)$ = **926,0 m**

$d = L / \cos \alpha = 3456 / \cos (15°)$ = **3577,9 m**

az út megtételéhez szükséges idő: $t = d / v$ = 3577,9m / (2500m/h) = **1,4312 h**

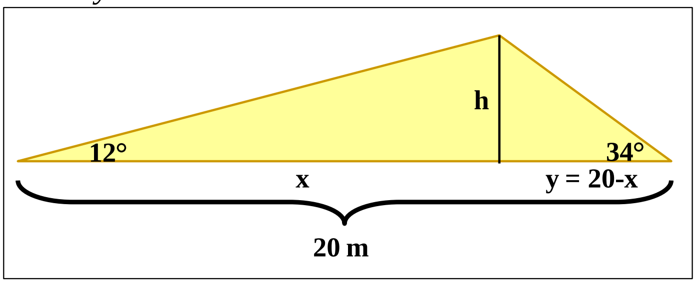
51. feladat

Az épület magassága és árnyéka egy derékszögű háromszöget alkotnak, melyben az átfogó a beeső napsugár. E derékszögű háromszögből:

tan α = 31/42 $\rightarrow$ α = arc tan (31/42) = **36,43°**

52. feladat

A lankásabb oldal felülnézeti hossza legyen x méter, a meredekebb oldal felülnézeti hossza y méter.



Mivel a keresztmetszet hossza 20 m, ezért $x + y = 20 \rightarrow y = 20 - x$

A dűne magasságát felírhatjuk a lankásabb és a meredekebb oldal alapján is.

$h = x \cdot \tan (12°) = (20 - x) \cdot \tan (34°)$

$x \cdot 0{,}2126 = (20 - x) \cdot 0{,}6745$

ezt rendezve megkapjuk, hogy

x = 15,21 m

és a fenti egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

h = 15,21 ·tan (12°) = **3,234 m**